Li Ye, Ceyuan Haijing, Arabic translation volumes 1-6 and 10-12

Arabic Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - Arabic Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.

測圓海鏡

مرآة البحر لقياس الدائرة

Ceyuan Haijing —Sea Mirror of Circle Measurements

卷一—卷三

المجلد الأول —المجلد الثالث

Volumes I –III

元　李冶　撰

لِـ يـِه □لي جِـه□، 1192–1279 م

(Li Ye / Li Zhi, 1192–1279 CE)

以天元術解勾股容圓一百七十問

حلّ مئة وسؤالٍ وسبعين مسألة في الدائرة المحاطة بالمثلث القائم
السماء عنصر بطريقة

Using the Method of the Celestial Element (Tian Yuan Shu)
to Solve 170 Problems on the Inscribed Circle

باستخدام طريقة عنصر السماء لحلّ 170 مسألة في الدائرة المحاطة

A foundational text of medieval Chinese algebra,
completed in the year 1248 of the Common Era.

أحد النصوص الأساسية في جبر العصور الوسطى الصينية،
ميلادية 1248 سنة في أُنجز

Bilingual Chinese–Arabic Edition / الطبعة الثنائية الصينية–العربية

Contents

1 Introduction / مقدمة

The *Ceyuan Haijing* (測圓海鏡, literally “Sea Mirror of Circle Measurements”) is the masterpiece of Li Ye (李冶, also known as Li Zhi, 1192–1279), one of the four great mathematicians of the Song–Yuan period of China, alongside Yang Hui, Qin Jiushao, and Zhu Shijie.

Completed in 1248, this work systematically applies the **tian yuan shu** (天元術, “method of the celestial element”)—an algebraic method for setting up and solving polynomial equations—to a total of 170 geometric problems concerning a circle inscribed in or related to a right triangle (勾股容圓).

□□□ □□□□ □□ □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□:

- □□□□□□ 1 □□□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□□□: □□□ □□□□□□ □□□□ □□□□□□□□ □圓城圖式,□ □□□ □□□□□□□□ □□□□ □□□□□ □總率名號,□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□ □□□□ □□□□□□□□ □今問正數,□ □□□ □□□ □□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □識別雜記□ □□□□□□□□□□□ 692 □□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□.
- □□□□□□□□ 12□□2 □□□□□□□□ 170 □□□□□□□□□,□□□□□□□ □□ □□□ □□□□ □□□□ □□□ □□□□□□□. □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□ 1 □□ .6

□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□□□□ 3□□1, □□□□□□□□□□ □□□ □□□ □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□ □□□□□ □□□□□ □□ □□□□□□□□□.

يعتبر كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة» □測圓海鏡□ تحفة الرياضياتي لي يه □李冶□ ، المعروف أيضًا باسم لي جيه، 1192–1279 م□، أحد العُظماء الأربعة في الرياضيات خلال فترة سونغ–يوان في الصين، إلى جانب يانغ هُوي وتشين جيُوشاو وتشو شِجيه.

أُنجز هذا العمل في سنة 1248 م، ويطبّق بشكل منهجي طريقة عنصر السماء □天元術□—وهي طريقة جبرية لوضع وحلّ المعادلات متعدّدة الحدود —على 170 مسألة هندسية تتعلق بدائرة محاطة بمثلث قائم أو مرتبطة به □勾股容圓□.

يُنظَّم الكتاب على النحو التالي:

- المجلد الأول: يضع الأسس النظرية: رسمة المدينة الدائرية □圓城圖式□، وأسماء المعدّلات العامة □總率名號□، وأعداد المسائل الحاضرة □今問正數□، وسجلات التمييز المتنوعة □識別雜記□ التي تحتوي على 692 صيغة هندسية.
- المجلدات 2–12: تعرض 170 مسألة، تُحلّ بطريقة عنصر السماء، وتشمل معادلات درجتها من الدرجة الأولى إلى السادسة.

يحتوي هذا الكتاب على النص الكامل للمجلدات 1–3، بما فيها جميع المواد الأساسية وأول مجموعة من المسائل.

2 Original Preface / المدمة الأصلية

數本難窮，吾欲以力強窮之，彼其數不惟不能得其凡，而吾之力且憊矣。然則數果不可以窮耶？既已名之數矣，則又何為而不可窮也。

故謂數為難窮斯可，謂數為不可窮斯不可。何則？彼其冥冥之中，固有昭昭者存，夫昭昭者其自然之數也。非自然之數，其自然之理也。數一出於自然，吾欲以力強窮之，使隸首復生亦末如之何也已。

苟能推自然之理，以明自然之數，則雖遠而乾端坤倪，幽而神情鬼狀，未有不合者矣。

予自幼喜算數，恆病夫考圓之術例出於牽強，殊乖於自然，如古率、徽率、密率之不同，截弧、截矢、截背之互見，內外諸角，析剖支條，莫不各自名家，與世作法。及反覆研究，卒無以當吾心焉。

老大以來，得洞淵九容之說，日夕玩繹，而向之病我者，使爆然落去而無遺余。山中多暇，客有從余求其說者，於是乎又為衍之，遂累一百七十問。

既成編，客復目之《測圓海鏡》，蓋取夫天臨海鏡之義也。

昔半山老人集《唐百家詩選》，自謂廢日力於此，良可惜。明道先生以上蔡謝君記誦為玩物喪志。夫文史尚矣，猶之為不足貴，況九九賤技能乎！

嗜好酸鹹，平生每痛自戒勅，竟莫能已，類有物憑之者，吾亦不知其然而然也。

故嘗私為之解曰：由技兼於事者言之，夷之禮，夔之樂，亦不免為一技。由技進乎道者言之，石之斤，扁之輪，非聖人之所與乎。

覽吾之編，察吾苦心，其憫我者當百數，其笑我者當千數。乃若吾之所自得，則自得焉耳，寧復為人憫笑計哉。

李冶序

أصل الأعداد يصعب استنفاده، ولو حاولتُ إجباره بالقوة، لما استطعتُ الحصول على جوهره، بل وستنضب قواي. فهل الأعداد لا تُستنفد حقًّا؟ بما أنها سُمّيت «أعدادًا»، فكيف لا يمكن استنفادها؟

فمن الجائز القول إنّ الأعداد يصعب استنفادها، لكن لا يجوز القول إنها لا تُستنفد. ولماذا؟ ففي وسط الظلام يوجد نورٌ باطن، وهذا النور هو العدد الطبيعي. بل هو ليس العدد الطبيعي وحسب، بل هو المبدأ الطبيعي. بما أن الأعداد تنبثق من الطبيعة، فلو حاولتُ إجبارها بالقوة، حتى لو بُعث لي شو [مخترع الحساب الأسطوري] من جديد، لعجز عن الأمر.

فإذا أمكن استنباط المبادئ الطبيعية لإيضاح الأعداد الطبيعية، فحتى أقاصي السماء وأطراف الأرض، وحتى أسرار الأرواح والأشباح، لن يخلوا من التوافق.

منذ صغري أحببتُ الحساب، وكنتُ أشكو دومًا أنّ طرق دراسة الدائرة تبدو مُكرهة وغير طبيعية —فالنسب القديمة والنسب الدقيقة والنسب المُحكَمة تختلف، والأقواس والأوتار والظهور تتباين، والزوايا الداخلية والخارجية تُحلّل إلى فروع. كلّ مدرسة وضعت اسمها وطريقتها للعالم. غير أنّ دراستها المتكرّرة لم تُشبِع فضولي.

في الكبر، حصلتُ على نظرية «تسعة استيعابات دونغ يوان» [洞淵九容]، وقد تأمّلتُها ليل نهار، فزال ما كان يؤلمني دفعةً واحدةً بلا أثر. وإذ كانت لديّ فراغاتٌ في الجبال، طلب منّي ضيوفي شرح هذه النظرية، فوسّعتُها حتى بلغت مئة وسبعين مسألة.

ولما اكتمل التأليف، أطلق عليه أحد الضيوف اسم «مرآة البحر لقياس الدائرة»، مستوحىً من معنى «السماء التي تُشرف على مرآة البحر».

لقد جمع «شيخ نصف الجبل» مختاراتٍ من شعر مئة شاعرٍ من تانغ، معتبرًا ذلك إضاعةً للوقت. وقد زمَر مستر مينغداو بشي شيه من شانغتساي لحفظه الشعر. وإذا كان الأدب والتاريخ —رغم علوّ شأنهما —لا يُعَدّان ثمينَين، فكيف بمهارة الضرب «تسعة في تسعة» الهزيلة!

إنّ حبّ الملح والخل، فقد حاولتُ طوال حياتي توبيخ نفسي والامتناع عنها، لكنني عجزتُ، كأنّ شيئًا ما يدفعني، ولا أدري كيف يحصل هذا.

ولذا فسّرتُ ذلك لنفسي: من جهة تطبيق المهارات، فإنّ طقوس يي وموسيقى كويي لا تخلوا من كونها مهارة. ومن جهة الارتقاء بالمهارة إلى الطريق، فإنّ فأس بن شي وعجلة بيان —أليس هما مما يُثنى عليه الحكماء؟

من يطالع تأليفي ويلمس جهدي، سيجد من يشفق عليّ بالمئات، ومن يسخروا مني بالألوف. أمّا ما اكتسبته لنفسي فهو لي وحدي، وهل أبالي بمن يشفق أو يسخر؟

تقديم لي يه

3 Volume 1 / المجلد الأول 卷一

Volume 1 is the theoretical foundation of the entire work. It comprises four major sections:

1. **Circle City Diagram** (圓城圖式) — the master geometric configuration
2. **General Rate Names** (總率名號) — definitions of all 15 right triangles and their elements
3. **Current Question Numbers** (今問正數) — numerical values for all line segments
4. **Identification Miscellaneous Records** (識別雜記) — 692 geometric formulas

المجلد الأول هو الأساس النظري للعمل بأكمله. ويتألّف من أربعة أقسام رئيسية:

1. رسمة المدينة الدائرية 圓城圖式 — التكوين الهندسي الرئيسي
2. أسماء المعدّلات العامة 總率名號 — تعريف المثلثات القائمة الخمسة عشر وعناصرها
3. أعداد المسائل الحاضرة 今問正數 — القيم الرقمية لجميع الخطوط
4. سجلات التمييز المتنوعة 識別雜記 — 692 صيغة هندسية

3.1 Circle City Diagram / رسمة المدينة الدائرية 圓城圖式

The *Circle City Diagram* is the master geometric configuration upon which all 170 problems are based. It consists of a large right triangle (called 勾股形, “leg–leg shape”) with its inscribed circle, together with specific points and lines.

The scenario Li Ye constructs is:

> 假令有圓城一所，不知周徑，四面開門，門外縱橫各有十字大道。其西北十字道頭定為乾地，其東北十字道頭定為艮地，其東南十字道頭定為巽地，其西南十字道頭定為坤地。所有測望雜法一一設問如後。

إنّ رسمة المدينة الدائرية هي التكوين الهندسي الرئيسي الذي تستند إليه جميع المسائل الـ170. وتتألّف من مثلث قائم كبير يُسمّى 勾股形، «شكل الضلع–الضلع» مع دائرته المحاطة، بالإضافة إلى نقاط وخطوط مُحدّدة.

والمنطق الذي بناه لي يه هو:

> لنفترض مدينة دائرية محيطها وقطرها مجهولان، لها أبواب على الجوانب الأربعة، وخارج كلّ باب طرقات متقاطعة شمالية–جنوبية وشرقية–غربية. الطرقات المتقاطعة الشمالية–الغربية تُسمّى «تشيين» 乾، والشمالية–الشرقية «كين» 艮، والجنوبية–الشرقية «شون» 巽، والجنوبية–الغربية «كون» 坤. جميع طرق القياس مفصّلة في المسائل أدناه.

[illegible] 22 [illegible]. [illegible] 天, [illegible] 地, [illegible], [illegible] 乾. [illegible] 心, [illegible]. [illegible]:

天	地	乾	心	日	南	北	川
東	西	艮	坤	山	月	巽	青
泉	朱	金	泛	旦	夕		

النقاط الثانية والعشرون المُسمّاة. المثلث القائم الأكبر له رؤوس تيان 天، السماء، ودي 地، الأرض، وتشيين 乾. ويُسمّى مركز الدائرة المحاطة شين 心، القلب. وتشمل النقاط الرئيسية تقاطعات الخطوط الأفقية والعمودية عبر المركز وخطوط أخرى مُنشأة. كلّ نقطة تُحدّد بحرفٍ صينيّ واحد:

天	地	乾	心	日	南	北	川
東	西	艮	坤	山	月	巽	青
泉	朱	金	泛	旦	夕		

3.2 General Rate Names / أسماء المعدّلات العامة 總率名號

The work studies **15 right triangles**, all having a segment of the *Tiandi* (天地) line as their hypotenuse (弦, "string"). The *General Rate Names* define these triangles and their three sides.

In each triangle:

- **弦** (c) — the hypotenuse (斜邊)
- **股** (b) — the longer vertical leg
- **勾** (a) — the shorter horizontal leg

يدرس هذا الكتاب 15 مثلثًا قائمًا، جميعها يتخذ قطعةً من خط تياندي 天地 وترًا له 弦 ، «الوتر». وتحدّد أسماء المعدّلات العامة هذه المثلثات وأضلاعها الثلاثة.

في كلّ مثلث:

- 弦 — الوتر c الوتر
- 股 — الضلع الرأسي الأطول b الضلع الطويل
- 勾 — الضلع الأفقي الأقصر a الضلع القصير

No.	Name / الاسم	الوتر **弦**	الضلع **股**	القاعدة **勾**
1	通 تونغ العام	通弦	通股	通勾
2	邊 بيان الجانب	邊弦	邊股	邊勾
3	底 دي القاعدة	底弦	底股	底勾
4	黃廣 هوانغ غوانغ	黃廣弦	黃廣股	黃廣勾
5	黃長 هوانغ تشانغ	黃長弦	黃長股	黃長勾
6	上高 شانغ غاو العلوي	上高弦	上高股	上高勾
7	下高 شيا غاو السفلي	下高弦	下高股	下高勾
8	上平 شانغ بينغ	上平弦	上平股	上平勾
9	下平 شيا بينغ	下平弦	下平股	下平勾
10	大差 دا تشا الكبير	大差弦	大差股	大差勾
11	小差 شياو تشا الصغير	小差弦	小差股	小差勾
12	皇極 هوانغ جي القصوي	皇極弦	皇極股	皇極勾
13	太虛 تاي شُو الخالص	太虛弦	太虛股	太虛勾
14	明 مينغ الضوء	明弦	明股	明勾
15	叀 تشوان التركيز	叀弦	叀股	叀勾

Note: 上高 = 下高 and 上平 = 下平, so among 15 triangles, only 13 are distinct.

ملاحظة: 上高 = 下高 و 上平 = 下平 ، لذا من بين 15 مثلثًا، هناك 13 مثلثًا مميزًا فقط.

3.3 Current Question Numbers / أعداد المسائل الحاضرة 今問正數

This section gives the numerical value of every line segment in the diagram. The **radius of the inscribed circle is taken as 120 steps** (步), which serves as the standard unit.

1. **通 (Tong / General)**

弦六百八十	勾三百二十	股六百
勾股和九百二十	較二百八十	
勾和一千	較三百六十	
股和一千二百八十	較八十	
較和九百六十	較四百	
和和一千六百	較二百四十	

That is: hypotenuse $c = 680$, short leg $a = 320$, $b = 600$.

يعطي هذا القسم القيمة الرقمية لكلّ قطعة خط في الرسمة. يُؤخذ نصف قطر الدائرة المحاطة بوحدة 120 خطوة 步، وهي تُستخدم كوحدة قياس معيارية.

1. تونغ العام

الوتر 680	الضلع 600	القاعدة 320
مجموع القاعدة والضلع 920	الفرق 280	
مجموع القاعدة 1000	الفرق 360	
مجموع الضلع 1280	الفرق 80	
مجموع الفرق 960	الفرق 400	
المجموع الكلي 1600	الفرق 240	

أي: الوتر $c = 680$، القاعدة $a = 320$، الضلع $b = 600$.

long leg $b = 600$.

2. **邊 (Bian / Side)**

弦五百四十四　勾二百五十六　股四百八十
勾股和七百三十六　較二百二十四
勾和八百　較二百八十八
股和一千零二十四　較六十四
較和七百六十八　較三百二十
和和一千二百八十　較一百九十二

2. بيان [الجانب]

القاعدة 256　الضلع 480　الوتر 544
الفرق 224　مجموع القاعدة والضلع 736
الفرق 288　مجموع القاعدة 800
الفرق 64　مجموع الضلع 1024
الفرق 320　مجموع الفرق 768
الفرق 192　المجموع الكلي 1280

3. **底 (Di / Base)**

弦四百二十五　勾二百　股三百七十五
勾股和五百七十五　較一百七十五
勾和六百二十五　較二百二十五
股和八百　較五十
較和六百　較二百五十
和和一千　較一百五十

3. دي [القاعدة]

القاعدة 200　الضلع 375　الوتر 425
الفرق 175　مجموع القاعدة والضلع 575
الفرق 225　مجموع القاعدة 625
الفرق 50　مجموع الضلع 800
الفرق 250　مجموع الفرق 600
الفرق 150　المجموع الكلي 1000

4. **黃廣 (Huang Guang)**

弦五百一十　勾二百四十　股四百五十
(即城徑也 — this is the city diameter)
勾股和六百九十　較二百一十

4. هوانغ غوانغ

القاعدة 240　الضلع 450　الوتر 510
[هذا هو قطر المدينة]
الفرق 210　مجموع القاعدة والضلع 690

The remaining 11 triangles follow the same pattern, each with 13 numerical quantities, giving a total of $15 \times 13 = 195$ numerical entries.

تتبع المثلثات الـ11 المتبقية النمط نفسه، ولكلّ منها 13 كمية رقمية، ما يعطي إجمالاً $15 \times 13 = 195$ مدخلاً رقميًا.

3.4 Identification Miscellaneous Records / سجلات التمييز المتنوعة 識別雜記

This is the theoretical heart of the work. It contains **692 geometric formulas** relating the various line segments in the diagram. These formulas are purely geometric theorems, independent of any particular numerical values. The problems in all subsequent volumes are solved by using these formulas together with the tian yuan shu.

The section is divided into eight parts:

1. **Various Names** (諸雜名目) — general definitions and 30+ theorems
2. **Five Sums and Five Differences** (五和五較)
3. **Various Hypotenuses** (諸弦)
4. **Large and Small Differences** (大小差)
5. **Various Differences** (諸差)
6. **Mutual Relations of Rates** (諸率互見)
7. **Four-Place Supplement** (四位拾遺)
8. **Supplement** (拾遺)

هذا هو القلب النظري للعمل. ويحتوي على 692 صيغة هندسية تربط الخطوط المختلفة في الرسمة. هذه الصيغ هي مبرهنات هندسية خالصة، مستقلة عن أي قيم رقمية مُعيّنة. وتُحلّ مسائل المجلدات التالية باستخدام هذه الصيغ معاً مع طريقة عنصر السماء.

يُقسّم هذا القسم إلى ثمانية أجزاء:

1. الأسماء المتنوعة 諸雜名目 —تعريفات عامة وأكثر من 30 مبرهنة
2. المجاميع الخمسة والفروق الخمسة 五和五較
3. الأوتار المختلفة 諸弦
4. الفروق الكبيرة والصغيرة 大小差
5. الفروق المختلفة 諸差
6. العلاقات المتبادلة للمعدّلات 諸率互見
7. التكميلة الرباعية 四位拾遺
8. التكميلة 拾遺

Sample Definitions from 諸雜名目 / نماذج تعريفات من «الأسماء المتنوعة»:

Name	Definition	التعريف
內率	明勾 × 叀股	القاعدة المضيئة × ضلع التركيز
外率	明股 × 叀勾	ضلع المضيء × قاعدة التركيز
虛率	虛勾 × 虛股	القاعدة الخالصة × الضلع الخالص
角差	高股 − 平勾	ضلع المرتفع − قاعدة المستوي
次差	(明股 − 明勾) + (叀股 − 叀勾)	ضلع المضيء−قاعدته + ضلع التركيز−قاعدته
混同和	黃長股 + 黃廣勾	ضلع هوانغ تشانغ + قاعدة هوانغ غوانغ
傍差	(明股 − 明勾) − (叀股 − 叀勾)	ضلع المضيء−قاعدته − ضلع التركيز−قاعدته

Sample Theorems / نماذج من المبرهنات:

- 凡大差小差相乘為半段徑冪。

  The product of the large difference and small difference equals half the square of the diameter.

- 大差勾小差股相乘同上。

  The product of the large-difference short-leg and the small-difference long-leg equals the same.

- 黃廣股黃長勾相乘為經冪。

- إنّ حاصل ضرب الفرق الكبير والفرق الصغير يساوي نصف مربّع القطر.
- حاصل ضرب قاعدة الفرق الكبير وضلع الفرق الصغير يساوي المقدار نفسه.
- حاصل ضرب ضلع هوانغ غوانغ وقاعدة هوانغ تشانغ يساوي مربّع القطر.
- مجموع الضلعين القائمين يساوي مجموع الوتر وقطر الدائرة المحاطة.

The product of the Huangguang long-leg and Huangchang short-leg equals the square of the diameter.

أي: $a + b = c + d$، حيث d هو قطر الدائرة المحاطة

- 勾股和即弦黄和。

  The sum of the two legs equals the sum of the hypotenuse and the diameter of the inscribed circle.

  That is: $a + b = c + d$, where d is the diameter.

4 Volume 2 / المجلد الثاني 卷二

正率一十四問 — Fourteen Questions on Standard Rates

These fourteen problems form the “Dongyuan Nine Containments” (洞淵九容) sequence, derived from the earlier work of the Daoist master Li Sicong (李思聰, known as “Master Dongyuan”). They present the nine fundamental types of circles contained in or related to a right triangle, plus five additional problems.

أربعة عشر مسألة في المعدّلات المعيارية

تُشكّل هذه المسائل الأربعة عشر سلسلة «تسعة استيعابات دونغ يوان» □容九淵洞□، المستوحاة من عمل السيّد الطاووي لي سِتسونغ □聰思李، المعروف باسم «سيّد دونغ يوان»□. وهي تعرض تسعة أنواع أساسية من الدوائر المحاطة بالمثلث القائم أو المرتبطة به، بالإضافة إلى خمس مسائل إضافية.

Problem 1 / المسألة الأولى 第一問

或問：甲乙二人俱在乾地，乙東行三百二十步而立，甲南行六百步望見乙，問徑幾里？

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾股容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪以求弦，復加入勾股共，以為法。

草曰 置甲南行六百步在地，以乙東行三百二十步乘之，得一十九萬二千步，倍之得三十入萬四千步為實。以乙東行步自之，得一十萬零二千四百步為勾冪；以甲南行步自之，得三十六萬步為股冪。二冪相並，得四十六萬二千四百步為方實，以平方開之，得六百八十步，則弦也。以弦加勾股共，共得一千六百步以為法。如法而一，得二百四十步，則城徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع تشيين. يسير ب نحو الشرق 320 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 600 خطوة ويرى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب القائم. بالمثلث المحاطة الدائرة مسألة هذه لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون الضلعين مجموع أضف ثم الوتر،

الحل: واضربها خطوة□ □600 الجنوب نحو أ سير مسافة ضع 192000 على تحصل خطوة□، □320 الشرق نحو ب سير بمسافة ربّع الذات. وهي خطوة 384000 على فتحصل واضعفها خطوة، القاعدة؛ مربّع وهي 102400 على فتحصل الشرق نحو ب سير مسافة مربّع وهي 360000 على فتحصل الجنوب نحو أ سير مسافة ربّع المربّعة، الذات وهي 462400 على فتحصل المربّعين اجمع الضلع. الوتر. وهي خطوة 680 على فتحصل التربيعي الجذر واستخرج خطوة 1600 المجموع يصبح الضلعين، مجموع إلى الوتر أضف خطوة 240 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي

Problem 2 / المسألة الثانية 第二問

或問：甲乙二人俱在西門，乙東行二百五十六步，甲南行四百八十步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪以求弦，加入股以為法。

草曰 置甲南行四百八十步在地，以乙東行二百五十六步乘之，得一十二萬二千八百八十步，倍之得二十四萬五千七百六十步為實。以乙東行步自之，得六萬五千五百三十六步為勾冪；以甲南行步自之，得二十三萬零四百步為股冪。勾股冪相並，得二十九萬五千九百三十六步為方實，以平方開之，得五百四十四步為弦也。以弦加入南行步，共得一千零二十四步以為法。而一，得二

سُئل: رجلان أ وب يقفان عند الباب الغربي. يسير ب نحو الشرق 256 خطوة، ويسير أ نحو الجنوب 480 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: الضلعين اضرب القاعدة. على المحاطة الدائرة مسألة هذه لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون الضلع أضف ثم الوتر،

الحل: واضربها خطوة□ □480 الجنوب نحو أ سير مسافة ضع 122880 على تحصل خطوة□، □256 الشرق نحو ب سير بمسافة ربّع الذات. وهي خطوة 245760 على فتحصل واضعفها خطوة، القاعدة؛ مربّع وهي 65536 على فتحصل الشرق نحو ب سير مسافة مربّع وهي 230400 على فتحصل الجنوب نحو أ سير مسافة ربّع

百四十步則城徑。合問。

الذات وهي 295936 على فتحصل الضلعين مربّعي اجمع الضلع. وهي خطوة 544 على فتحصل التربيعي الجذر واستخرج المربّعة، المجموع يصبح الجنوب، نحو السير مسافة إلى الوتر أضف الوتر. على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو خطوة 1024 المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240

Problem 3 / المسألة الثالثة　第三問

或問：甲乙二人俱在北門，乙東行二百步而止，甲南行三百七十五步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為股上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾股冪求弦，加入勾以為法。

草曰 置甲南行三百七十五步，以乙東行二百步乘之，得七萬五千步，倍之得一十五萬步為實。以乙東行自之，得四萬步為勾冪；以甲南行自之，得一十四萬零六百二十五步為股冪。勾股冪相並，得一十八萬零六百二十五步為方實。如平方而一，得四百二十五步則弦也。加入乙東行二百步，共得六百二十五步以為法。以法除之，得二百四十步，則城徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان عند الباب الشمالي. يسير ب نحو الشرق 200 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 375 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: هذه مسألة على المحاطة الدائرة. على الضلعين اضرب الضلع مربّعي من الوتر واستخرج الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. فتكون القاعدة أضف ثم الضلعين،

الحل: نحو أ سير مسافة ضع الجنوب 375 واضربها خطوة 200 الشرق نحو ب سير بمسافة خطوة، على تحصل 75000 ربّع الذات. وهي خطوة 150000 على فتحصل واضعفها خطوة، القاعدة؛ مربّع وهي 40000 على فتحصل الشرق نحو ب سير مسافة مربّع وهي 140625 على فتحصل الجنوب نحو أ سير مسافة ربّع الذات وهي 180625 على فتحصل الضلعين مربّعي اجمع الضلع. وهي خطوة 425 على فتحصل التربيعي الجذر استخرج المربّعة. يصبح خطوة، 200 الشرق نحو ب سير مسافة أضف الوتر. فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو خطوة 625 المجموع المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على

Problem 4 / المسألة الرابعة　第四問

或問：甲乙二人俱在圓城中心而立，乙穿城向東行一百三十六步而止，甲穿城南行二百五十五步望見乙，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾股上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，並勾股冪如法求弦，以為法。

草曰 以二行步相乘，得三萬四千六百八十步，倍之得六萬九千三百六十步為實。置乙東行自之，得一萬八千四百九十六步為勾冪；又以甲南行自之，得六萬五千零二十五步為股冪。二冪相並，得八萬三千五百二十一步為方實，以平方開之，得二百八十九步即弦也。便以為法。如法除實，得二百四十步，即圓城之徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في مركز المدينة الدائرية. يعبر ب المدينة ويسير نحو الشرق 136 خطوة ويقف، ويعبر أ المدينة ويسير نحو الجنوب 255 خطوة ويرى ب. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: هذه مسألة على المحاطة الدائرة. القاعدة على اضرب والضلع لاستخراج الضلعين مربّعي واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف المسافتين القاسية. فتكون الوتر

الحل: اضرب المسافتين على فتحصل 34680 واضعفها خطوة، نحو ب سير مسافة ربّع الذات. وهي خطوة 69360 على فتحصل أ سير مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 18496 على فتحصل الشرق المربّعين اجمع الضلع. مربّع وهي 65025 على فتحصل الجنوب نحو التربيعي الجذر واستخرج المربّعة، الذات وهي 83521 على فتحصل الذات اقسم القاسية. وهي الوتر. وهي خطوة 289 على فتحصل الدائرية. المدينة قطر وهي خطوة 240 على فتحصل القاسية على المطلوب. مع يتطابق

Problem 5 / المسألة الخامسة 第五問

或問：甲乙二人同立於乾地，乙東行一百八十步遇塔而止，甲南行三百六十步，回望其塔正居城徑之半，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為弦上容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾股和為法。

草曰 以二行步相乘，得六萬四千八百步，倍之得一十二萬九千六百步為實。並二行步，得五百四十步以為法。除實，得二百四十步，即城徑也。合問。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع تشيين. يسير ب نحو الشرق 180 خطوة حتى يصل البرج ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، وعندما ينظر إلى الوراء يرى البرج عند منتصف قطر المدينة. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: هذه مسألة الدائرة المحاطة على الوتر. اضرب الضلعين القائمين فتكون الضلعين واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية.

الحل: اضرب المسافتين على فتحصل المسافتين واضعفها خطوة، 64800 فتحصل المسافتين اجمع الذات. وهي خطوة 129600 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهي خطوة 540 على فتحصل المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على

Problem 6 / المسألة السادسة 第六問

或問：甲乙二人俱在坤地，乙東行一百九十二步而止，甲南行三百六十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以弦較和為法。

草曰 以二行步相乘，得六萬九千一百二十步，倍之得一十三萬八千二百四十步為實。置乙東行自之，得三萬六千八百六十四步為勾冪；又置甲南行自之，得一十二萬九千六百步為股冪。二冪相並，得一十六萬六千四百六十四步為方實，以平方開之，得四百零八，即弦也。又置甲南行步內減乙東行步，餘一百六十八步，即較也。以較加弦，共得五百七十六步以為法。實如法而一，得二百四十步，為城徑也。合問。

〔按〕此題用勾股求得弦，即可加減得弦較較為城徑。今必以勾股相乘倍積為實，求得弦較和為法，而後始得弦較較為城徑者，蓋欲因此並明勾股相乘之倍積為弦較較、弦較和相乘之積，非故為紆回也。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كون. يسير ب نحو الشرق 192 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: هذه مسألة الدائرة المحاطة خارج الضلعين اضرب القاعدة. فتكون الضلعين القائمين واضعف القائمين القاسية.

الحل: اضرب المسافتين على فتحصل المسافتين واضعفها خطوة، 69120 فتحصل المسافتين اجمع الذات. وهي خطوة 138240 على فتحصل مسافة ربّع القاعدة؛ مربّع وهي 36864 على فتحصل الشرق نحو اجمع الضلع. مربّع وهي 129600 على فتحصل الجنوب نحو أ سير واستخرج المربّعة، الذات وهي 166464 على فتحصل المربّعين سير مسافة اطرح ثم الوتر. وهو 408 على فتحصل التربيعي الجذر خطوة 168 يتبقّى الجنوب، نحو أ سير مسافة من الشرق نحو ب خطوة 576 المجموع يصبح الوتر، إلى الفرق أضف الفرق. وهي خطوة 240 على فتحصل القاسية على الذات اقسم القاسية. وهو المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي

〕 تعليق في: هذه المسألة، من الوتر استخراج يمكن القائمين الضلعين يجب أنّه غير المدينة. قطر على للحصول والطرح الجمع إجراء ثم ومجموع كذات، القائمين الضلعين ضرب حاصل ضعف استخدام من والغرض المدينة. قطر على الحصول ثم كقاسية، والفرق الوتر يساوي القائمين الضلعين ضرب حاصل ضعف أنّ توضيح هو ذلك وليس الفرق□، زائد و□الوتر الفرق□ ناقص □الوتر ضرب حاصل التعقيد. مجرد

Problem 7 / المسألة السابعة 第七問

或問：甲乙二人同立於艮地，甲南行一百五十步而止，乙東行八十步，望乙與城參相直，問答

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كِن. يسير أ نحو الجنوب 150 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 80 خطوة، ويرى ب والمدينة

同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為股外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以弦和較為法。

على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

الضلعين اضرب الضلع. خارج المحاطة الدائرة مسألة هذه الطريقة: الوتر مجموع فرق واجعل الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين القاسية. والضلع

Problem 8 / المسألة الثامنة　第八問

或問：甲乙二人同立於坤地，甲南行一百九十二步而止，乙東行七十二步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為弦外容圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾股較為法。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كون. يسير أ نحو الجنوب 192 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 72 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

الضلعين اضرب الوتر. خارج المحاطة الدائرة مسألة هذه الطريقة: القاسية. الضلعين فرق واجعل الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين

Problem 9 / المسألة التاسعة　第九問

或問：甲乙二人俱在巽地，乙東行一百九十二步而止，甲南行三百六十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為勾外容半圓也。以勾股相乘，倍之為實，以股弦和為法。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع شون. يسير ب نحو الشرق 192 خطوة ويقف، ويسير أ نحو الجنوب 360 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

اضرب القاعدة. خارج المحاطة الدائرة نصف مسألة هذه الطريقة: والوتر الضلع واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين الضلعين القاسية. فتكون

Problem 10 / المسألة العاشرة　第十問

或問：甲乙二人俱在艮地，甲南行一百五十步而止，乙東行八十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 此為股外容半圓也。以勾股相乘，倍之為實，以勾弦和為法。

سُئل: رجلان أ وب يقفان في موقع كِن. يسير أ نحو الجنوب 150 خطوة ويقف، ويسير ب نحو الشرق 80 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

اضرب الضلع. خارج المحاطة الدائرة نصف مسألة هذه الطريقة: والوتر القاعدة واجمع الذات، فتكون الناتج واضعف القائمين الضلعين القاسية. فتكون

The above ten problems constitute the "Dongyuan Nine Containments" (洞淵九容), supplemented by Problem 5 (弦上容圓). The remaining four problems of Volume 2 continue with additional standard-rate problems using the tian yuan shu method.

تُشكّل المسائل العشرة أعلاه «تسعة استيعابات دونغ يوان» 洞淵九容، بالإضافة إلى المسألة الخامسة الدائرة المحاطة على الوتر. وتستمر المسائل الأربع المتبقية في المجلد الثاني بمسائل إضافية في المعدّلات المعيارية باستخدام طريقة عنصر السماء.

5 Volume 3 / المجلد الثالث 卷三

邊股一十七問 — Seventeen Questions on the Side-Long-Leg

Volume 3 presents 17 problems in which the given data involve the *side long-leg* (邊股, b_2), defined as the long leg of the "Side" triangle (邊 triangle, No. 2 in the table), equal to 480 steps. In all problems of this volume, the unknown to be found is the diameter of the circular city (城徑 = 240 steps).

These problems demonstrate the increasing sophistication of the tian yuan shu method, with equations ranging from quadratic to cubic degree.

سبع عشرة مسألة في الضلع الجانبي

يعرض المجلد الثالث 17 مسألة تتضمّن البيانات المعطاة الضلع الطويل الجانبي 邊股 ، b_2، المعرَّف بأنه الضلع الطويل للمثلث الجانبي 邊 ، رقم 2 في الجدول، وهو يساوي 480 خطوة. وفي جميع مسائل هذا المجلد، المجهول المطلوب إيجاده هو قطر المدينة الدائرية 城徑 240 خطوة.

توضّح هذه المسائل التطوّر المتزايد في طريقة عنصر السماء، حيث تتراوح المعادلات من الدرجة الثانية إلى الدرجة الثالثة.

Problem 1 / المسألة الأولى 第一問

或問：乙出東門南行，不知步數而止。甲出西門南行四百八十步，望見乙，復就乙行五百一十步與乙相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 倍相減步，以乘二之甲南行步，為平方實，得城徑。

草曰 識別得二行相減，餘三十步，即乙出東門南行步也。倍相減步，得六十步，以乘二之甲南行步九百六十步，得五萬七千六百步，為平方實。如法開之，得二百四十步，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب مسافة مجهولة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب، ثم يسير نحو ب 510 خطوة حتى يلتقي به. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: سير مسافة بضعف واضربه المسافتين، بين الفرق اضعف المدينة. قطر على وتحصل التربيع، ذات فتكون الجنوب، نحو أ مسافة وهي خطوة، 30 يتبقّى المسافتين، نطرح بالتمييز: الحل: على فنحصل الفرق نضعف الجنوب. نحو الشرقي الباب من ب سير خطوة، 960 الجنوب نحو أ سير مسافة بضعف ونضربها خطوة، 60 الجذر نستخرج التربيع. ذات وهي خطوة 57600 على فنحصل المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فنحصل

Problem 2 / المسألة الثانية 第二問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙從艮隅東行八十步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 倍南行步，以東行步乘之為實，東行步為從方，一步常法，得全徑。

草曰 立天元一為全徑，以減於二之甲南行步，得為兩個大差也。以乙東行步乘之，得為圓徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得以帶縱平方開之，得二百四十步，即城徑也。合問。

又法： 半之乙東行步，乘南行步為實，半之乙東行步為從，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，減甲南行步，得為大差也。以半之東行步乘之，得即半徑冪，寄左。然後以天元冪為同數，與左相消，得開帶縱平方，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يسير ب من زاوية كِن نحو الشرق 80 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

الجواب: قطر المدينة 240 خطوة.

الطريقة: السير بمسافة واضربها الجنوب، نحو السير مسافة اضعف الطرف الشرق نحو السير مسافة واجعل الذات، فتكون الشرق نحو الكامل. القطر على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا المرافق،

الحل: ضعف من ونطرحه الكامل، القطر يساوي السماء عنصر نضع نضربها الكبير. الفرق ضعف على فنحصل الجنوب، نحو أ سير مسافة ونضعها الدائرة، قطر مربّع على فنحصل الشرق نحو ب سير بمسافة فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فنحصل الطرف ذا التربيعي الجذر المطلوب. مع يتطابق

طريقة ثانية: نصف مسافة السير نحو الشرق مضروبًا بمسافة السير نحو الجنوب فتكون الذات، ونصف مسافة السير نحو الشرق هو الطرف المرافق، وواحدًا القاسية الثابتة، فتحصل على نصف

القطر.

من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: بنصف نضربها الكبير. الفرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير مسافة ونضعها القطر، نصف مربّع على فنحصل الشرق نحو السير مسافة مع ونلغِه لها، مساويًا السماء عنصر مربّع نجعل ثم اليسار. على على فنحصل الطرف ذا التربيعي الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120

Problem 3 / المسألة الثالثة 第三問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙從艮隅亦南行一百五十步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行步相乘為實，南行步為從方，一為隅，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，以減乙南行步，得為半梯頭；以甲行步為梯底，以乘之，得為半徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得開帶縱平方，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يسير ب من زاوية كِن أيضًا نحو الجنوب 150 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

نحو السير مسافة واجعل الذات، فتكون المسافتين اضرب الطريقة: القطر. نصف على فتحصل الركن، والواحد المرافق، الطرف الجنوب

من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: نجعل السلّم. رأس نصف على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة نصف مربّع على فنحصل ونضربها للسلّم، السفلي الطول أ سير مسافة الطرف مع ونلغِه السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على ونضعها القطر، 120 على فنحصل الطرف ذا التربيعي الجذر فنستخرج الأيسر، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 4 / المسألة الرابعة 第四問

或問：甲出西門南行四百八十步，乙出東門直行一十六步，望見甲，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以四之東行步，乘南行冪為實，從空，東行為廉，一步為隅法，得全徑。

草曰 立天元一為圓徑，加乙東行步，得為中勾；其甲南行即中股也。置東行步為小勾，以中股乘之，得，合以中勾除，今不受除，便以為小股也。內寄中勾分母。乃復以中股乘之，得三百六十八萬六千四百，又四之，得一千四百七十四萬五千六百，為一段圓徑冪，寄中勾分母，寄左。然後以天元徑自之，又以中勾乘之，得為同數，與左相消，得以帶縱立方開之，得二百四十步，為城徑也。合問。

〔按〕不受除者，無可除之理也。凡二數，此數於彼數有可除之理，則受除；無可除之理，則不受除也。蓋除有法有實，實可二，法不可二。此題以中勾為法，而中勾內有一元，又有十六步，其為數已二矣，又何以均分不一之數乎？故曰不受也。寄分者，姑寄其應除之數也。俟求得兩相等數，而此數內尚少一除，不除此而轉乘彼，則兩

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويخرج ب من الباب الشرقي ويسير مباشرة 16 خطوة، ويرى أ. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

بمربّع مضروبة الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة الطريقة: السير مسافة فارغ، الطرف الذات، فتكون الجنوب نحو السير مسافة القطر على فتحصل الركن، قاسية وواحدًا الكشك، هي الشرق نحو الكامل.

مسافة إليه ونضيف الدائرة، قطر يساوي السماء عنصر نضع الحل: سير ومسافة الوسطى؛ القاعدة على فنحصل الشرق نحو ب سير الشرق نحو السير مسافة نضع الأوسط. الضلع هي الجنوب نحو أ تقسيمها يجب على... فنحصل الأوسط، بالضلع ونضربها صغرى، كقاعدة الصغير الضلع فنعتبرها القسمة، تقبل لا لكنّها الوسطى، القاعدة على بالضلع أخرى مرة نضربها ثم مقامًا. الوسطى القاعدة إبقاء مع مؤقتًا، 14745600، هي أضعافها وأربعة 3686400، على فنحصل الأوسط ونضعها مقامًا، الوسطى القاعدة إبقاء مع الدائرة، قطر مربّع وهي الوسطى بالقاعدة ونضربها القطر السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه المساوي، على فنحصل المدينة. قطر وهي خطوة 240 على فنحصل الطرف ذا التكعبي المطلوب. مع يتطابق

ففي ممكنة. غير القسمة أنّ يعني القسمة» تقبل «لا القول〕 تعليق 〔

數仍相等，猶之受除者也。此所謂以乘代除也。

فهو الآخر على القسمة يقبل أحدهما كان إذا عددين، وجود حال أنّ ذلك القسمة». يقبل «لا فهو يقبل يكن لم وإذا القسمة»، «يقبل يكون أن يمكن والمقسوم عليه، ومقسومًا مقسومًا تقتضي القسمة الوسطى القاعدة المسألة، هذه ففي فلا. عليه المقسوم أمّا ثنائيًا خطوة، 16 وعلى مجهول على تحتوي وهي عليها، المقسوم هي نقول لهذا موحّد؟ غير عددًا نقسم فكيف ثنائي، عدد بالفعل فهي المفترض العدد تأجيل فهو ككسور» «الإبقاء أمّا القسمة. تقبل لا إنّها لا أحدهما وكان متساويين، عددين على حصلنا إذا حتى قسمته. الآخر، الطرف نضرب نقسم أن فبدل واحدة، قسمة إلى يفتقر يزال بالضرب «الاستعاضة يُسمّى ما وهذا قُسما. كأنّهما متساويين، فيبقيان القسمة». عن

Problem 5 / المسألة الخامسة 第五問

或問：乙出南門東行七十二步而止，甲出西門南行四百八十步，望乙與城參相直，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以乙東行冪，乘甲南行為實；乙東行冪為從方；甲南行步內減二之東行步為益廉；一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半城徑，以減南行步，得為小股。又以天元加乙東行步，得為小勾。又以天元加南行步，得為大股。乃置大股在地，以小勾乘之，得下式，合以小股除之，今不受除，便以為大勾，內寄小股分母。又置天元半徑，以分母小股乘之，得以減大勾，得為半個梯底於上。以乙東行七十二步為半個梯頭，以乘上位，得為半徑冪，內寄小股分母，寄左。然後置天元冪，又以分母小股乘之，得為同數，與左相消，以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج ب من الباب الجنوبي ويسير نحو الشرق 72 خطوة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: نحو أ سير بمسافة مضروبًا الشرق نحو ب سير مسافة مربّع الطرف هو الشرق نحو ب سير مسافة مربّع الذات؛ فتكون الجنوب نحو السير مسافة ضعف ناقص الجنوب نحو أ سير مسافة المرافق؛ على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب؛ الكشك هو الشرق القطر. نصف

الحل: من ونطرحه المدينة، قطر نصف يساوي السماء عنصر نضع ونضيف الصغير. الضلع على فنحصل الجنوب نحو السير مسافة القاعدة على فنحصل الشرق نحو ب سير مسافة إلى السماء عنصر فنحصل الجنوب نحو السير مسافة إلى السماء عنصر ونضيف الصغرى. فنحصل الصغرى بالقاعدة ونضربه الأكبر الضلع نضع الأكبر. الضلع على يقبل لا لكنّه الصغير، الضلع على تقسيمه ويجب التالي، الناتج على مقامًا. الصغير الضلع إبقاء مع مؤقتًا الكبرى القاعدة فنعتبره القسمة، الصغير[]، []الضلع بالمقام ونضربه السماء عنصر قطر نصف نضع ثم الأعلى. في السلّم قاع نصف على فنحصل الكبرى القاعدة من ونطرحه السلّم، رأس نصف هي خطوة[] []72 الشرق نحو ب سير ومسافة الضلع إبقاء مع القطر نصف مربّع على فنحصل الأعلى بالعدد ونضربها ونضربها السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على ونضعها مقامًا، الصغير الطرف مع ونلغِه المساوي، على فنحصل الصغير[] []الضلع بالمقام نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر فنستخرج الأيسر، المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل

Problem 6 / المسألة السادسة 第六問

或問：乙出南門東行，不知步數而立。甲出西門南行四百八十步，望見乙與城參相直，又就乙行四百零八步與乙相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 以兩行相乘為實，以兩行相減為從，一步常法，平開得半徑。

سُئل: يخرج ب من الباب الجنوبي ويسير نحو الشرق مسافة مجهولة ويقف. يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة، ويرى ب والمدينة على استقامة واحدة، ثم يسير نحو ب 408 خطوات حتى يلتقي به. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: المسافتين فرق واجعل الذات، فتكون المسافتين اضرب

草曰 立天元一為半徑。以加就乙行步，得為大勾；以減甲南行步，得為大股。乃以大勾、大股相乘，得下式，合以天元加就乙行除之，今不受除，便以為小股，內寄分母。又以天元乘之，得為半徑冪，寄左。然後以天元冪與左相消，得平開，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

التربيعي الجذر فاستخرج الثابتة، القاسية وواحدًا المرافق، الطرف هو القطر. نصف على فتحصل

مسافة إليه نضيف القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: سير مسافة من ونطرحه الكبرى؛ القاعدة على فنحصل ب نحو السير الكبرى القاعدة نضرب الأكبر. الضلع على فنحصل الجنوب نحو أ مجموع على تقسيمه ويجب التالي، الناتج على فنحصل الأكبر بالضلع فنعتبره القسمة، يقبل لا لكنّه ب، نحو السير ومسافة السماء عنصر فنحصل السماء بعنصر نضربها ثم المقام. إبقاء مع مؤقتًا الصغير الضلع السماء عنصر نربّع ثم اليسار. على ونضعها القطر، نصف مربّع على على فنحصل التربيعي الجذر فنستخرج الأيسر، الطرف مع ونلغِه المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120

Problem 7 / المسألة السابعة 第七問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三十步，望見甲，又斜行二百五十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行步相減，以乘兩行步相併為實，兩行步相減又自之為從方，兩倍兩行步相減為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減乙南行步，得為梯頭；以甲南行步為梯底。以梯頭乘梯底，得為半徑冪，寄左。乃以兩行步相減，餘四百五十步；又以兩行步相併，得五百一十步；以減餘乘之，得二十二萬九千五百步為實。又以減餘四百五十步自之，得二十萬零二千五百步為從方。又以減餘倍之，得九百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 30 خطوة، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 250 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح الطريقة: اضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون المسافتين فرق القطر. نصف على فتحصل

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: نحو أ سير ومسافة السلّم؛ رأس على فنحصل الجنوب نحو ب سير على فنحصل بقاعه السلّم رأس نضرب السلّم. قاع هي الجنوب فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، نصف مربّع نضرب خطوات؛ 510 على فنحصل المسافتين ونجمع خطوة؛ 450 نربّع الذات. وهي خطوة 229500 على فنحصل بالمجموع الباقي المرافق. الطرف وهي 202500 على فنحصل خطوة[ ]450 الباقي الموجب. الكشك وهي خطوة 900 على فنحصل الباقي ونضعف فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على

Problem 8 / المسألة الثامنة 第八問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行五十四步而止，望見甲，又斜行三百三十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，四之兩行相減為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減乙南行步，得為梯頭差；以甲南行步內減天元，得為梯底差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘四百二十六步；又與兩行相併，得五百三

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 54 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 330 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح الطريقة: أربعة المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون المسافتين فرق أضعاف القطر. نصف على فتحصل الثابتة،

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: عنصر ونطرح السلّم؛ رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير

十四步；以減餘乘之，得二十二萬七千四百八十四步為實。又以減餘自之，得一十八萬一千四百七十六步為從方。又以減餘四之，得一千七百零四步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

السلّم. قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير مسافة من السماء القطر، نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب ونجمع خطوة؛ 426 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها فنحصل بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 534 على فنحصل المسافتين 181476 على فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 227484 على خطوات 1704 هي الباقي أضعاف وأربعة المرافق. الطرف وهي 120 على فنحصل التكعبي الجذر نستخرج الموجب. الكشك وهي المطلوب. مع يتطابق المدينة. قطر على فنحصل نضعفها خطوة.

Problem 9 / المسألة التاسعة 第九問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行九十步而止，望見甲，又斜行三百九十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百九十步；又以兩行相併，得五百七十步；以減餘乘之，得二十二萬二千三百步為實。又以減餘自之，得一十五萬二千一百步為從方。又以減餘倍之，得七百八十步；又益四之乙東行九十步，得三百六十步；共得一千一百四十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 90 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 390 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

الحل: مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 390 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 570 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 222300 على فنحصل خطوة؛ 780 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 152100 على خطوة[ ]90 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1140 والمجموع 360؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 10 / المسألة العاشرة 第十問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行一百二十步而止，望見甲，又斜行四百五十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百六十步；又以兩行相併，得六百步；

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 120 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 450 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

以減餘乘之，得二十一万六千步為實。又以減餘自之，得一十二萬九千六百步為從方。又以減餘倍之，得七百二十步；又益四之乙東行一百二十步，得四百八十步；共得一千二百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 360 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 600 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 216000 على فنحصل خطوة؛ 720 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 129600 على خطوة[ ]120 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1200 والمجموع 480؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 11 / المسألة الحادية عشرة　第十一問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行一百八十步而止，望見甲，又斜行五百一十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘三百步；又以兩行相併，得六百六十步；以減餘乘之，得十九萬八千步為實。又以減餘自之，得九萬步為從方。又以減餘倍之，得六百步；又益四之乙東行一百八十步，得七百二十步；共得一千三百二十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 180 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 510 خطوات حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 300 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 660 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 198000 على فنحصل خطوة؛ 600 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 90000 على خطوة[ ]180 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1320 والمجموع 720؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 12 / المسألة الثانية عشرة　第十二問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百一十步而止，望見甲，又斜行五百七十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 210 خطوات ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 570 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: خطوة. 240 المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات.

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘二百七十步；又以兩行相併，得六百九十步；以減餘乘之，得十八萬六千三百步為實。又以減餘自之，得七萬二千九百步為從方。又以減餘倍之，得五百四十步；又益四之乙東行二百一十步，得八百四十步；共得一千三百八十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

الحل: مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 270 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 690 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 186300 على فنحصل خطوة؛ 540 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 72900 على خطوات 210 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1380 والمجموع 840؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 13 / المسألة الثالثة عشرة **第十三問**

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百四十步而止，望見甲，又斜行六百三十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘二百四十步；又以兩行相併，得七百二十步；以減餘乘之，得十七萬二千八百步為實。又以減餘自之，得五萬七千六百步為從方。又以減餘倍之，得四百八十步；又益四之乙東行二百四十步，得九百六十步；共得一千四百四十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 240 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 630 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

الحل: مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 240 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 720 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 172800 على فنحصل خطوة؛ 480 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 57600 على خطوة 240 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1440 والمجموع 960؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 14 / المسألة الرابعة عشرة **第十四問**

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行二百七十步而止，望見甲，又斜行六百九十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 270 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 690 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘二百一十步；又以兩行相併，得七百五十步；以減餘乘之，得十五萬七千五百步為實。又以減餘自之，得四萬四千一百步為從方。又以減餘倍之，得四百二十步；又益四之乙東行二百七十步，得一千零八十步；共得一千五百步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح الطريقة: ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوات؛ 210 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 750 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 157500 على فنحصل خطوة؛ 420 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 44100 على خطوة[ ]270 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1500 والمجموع 1080؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 15 / المسألة الخامسة عشرة　第十五問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百步而止，望見甲，又斜行七百五十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百八十步；又以兩行相併，得七百八十步；以減餘乘之，得十四萬零四百步為實。又以減餘自之，得三萬二千四百步為從方。又以減餘倍之，得三百六十步；又益四之乙東行三百步，得一千二百步；共得一千五百六十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 300 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 750 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

خطوة. 240 المدينة قطر الجواب:

فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح الطريقة: ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

مسافة من نطرحه القطر. نصف يساوي السماء عنصر نضع الحل: عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 180 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 780 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 140400 على فنحصل خطوة؛ 360 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 32400 على خطوة[ ]300 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1560 والمجموع 1200؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

Problem 16 / المسألة السادسة عشرة　第十六問

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百三十步而止，望見甲，又斜行八百一十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百五十步；又以兩行相併，得八百一十步；以減餘乘之，得十二万一千五百步為實。又以減餘自之，得二萬二千五百步為從方。又以減餘倍之，得三百步；又益四之乙東行三百三十步，得一千三百二十步；共得一千六百二十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 330 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 810 خطوات حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

الحل: نصف يساوي السماء عنصر نضع مسافة من نطرحه القطر. عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 150 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوات؛ 810 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 121500 على فنحصل خطوة؛ 300 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 22500 على خطوة[ ]330 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1620 والمجموع 1320؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

第十七問 المسألة السابعة عشرة / Problem 17

或問：甲出西門南行四百八十步而止，乙出東門南行三百六十步而止，望見甲，又斜行八百七十步與甲相會，問答同前。

答 城徑二百四十步。

法曰 兩行相減，以乘兩行相併為實，兩行相減自之為從方，兩倍兩行相減又益四之東行為益廉，一步常法，得半徑。

草曰 立天元一為半徑。以減甲南行步，得為梯底差；以乙南行步內減天元，得為梯頭差。以梯頭差乘梯底差，得為半徑冪，寄左。乃以兩行相減，餘一百二十步；又以兩行相併，得八百四十步；以減餘乘之，得十萬零八百步為實。又以減餘自之，得一万四千四百步為從方。又以減餘倍之，得二百四十步；又益四之乙東行三百六十步，得一千四百四十步；共得一千六百八十步為益廉。以立方開之，得一百二十步。倍之，即城徑也。合問。

سُئل: يخرج أ من الباب الغربي ويسير نحو الجنوب 480 خطوة ويقف. يخرج ب من الباب الشرقي ويسير نحو الجنوب 360 خطوة ويقف، ويرى أ، ثم يسير مائلًا 870 خطوة حتى يلتقي بأ. الجواب كالسابق.

الجواب: 240 خطوة. المدينة قطر

الطريقة: فتكون المسافتين بمجموع الناتج واضرب المسافتين، اطرح ضعف المرافق. الطرف فتكون الناتج وربّع المسافتين اطرح الذات. الشرق نحو السير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا المسافتين فرق نصف على فتحصل الثابتة، القاسية وواحدًا الموجب. الكشك فتكون القطر.

الحل: نصف يساوي السماء عنصر نضع مسافة من نطرحه القطر. عنصر ونطرح السلّم؛ قاع فرق على فنحصل الجنوب نحو أ سير رأس فرق على فنحصل الجنوب نحو ب سير مسافة من السماء نصف مربّع على فنحصل قاعه بفرق السلّم رأس فرق نضرب السلّم. خطوة؛ 120 فيتبقّى المسافتين نطرح اليسار. على ونضعها القطر، بالمجموع الباقي نضرب خطوة؛ 840 على فنحصل المسافتين ونجمع فنحصل الباقي نربّع الذات. وهي خطوة 100800 على فنحصل خطوة؛ 240 هو الباقي وضعف المرافق. الطرف وهي 14400 على خطوة[ ]360 الشرق نحو ب سير مسافة أضعاف أربعة إلى مضافًا نستخرج الموجب. الكشك وهي خطوة 1680 والمجموع 1440؛ فتصبح قطر على فنحصل نضعفها خطوة. 120 على فنحصل التكعبي الجذر المطلوب. مع يتطابق المدينة.

6 The Tian Yuan Shu Method / 術元天 طريقة عنصر السماء

The *tian yuan shu* (天元術, "method of the celestial element") is the algebraic technique employed throughout the *Ceyuan Haijing*. It is the earliest systematic method in Chinese mathematics for setting up and solving polynomial equations with one unknown.

The name 天元 (tian yuan, "celestial element") refers to the unknown quantity in an equation. The method is equivalent to what we now call polynomial algebra in one variable.

إنّ طريقة عنصر السماء □術元天 ، «طريقة عنصر السماء»□ هي التقنية الجبرية المستخدمة في جميع أنحاء كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة». وهي أول طريقة منهجية في الرياضيات الصينية لوضع وحلّ المعادلات متعدّدة الحدود بمجهول واحد.

يشير اسم 天元 □تيان يوان، «عنصر السماء»□ إلى الكمّية المجهولة في المعادلة. وتُعادل هذه الطريقة ما نسمّيه الآن بالجبر متعدّد الحدود بمتغيّر واحد.

6.1 Methodology / المنهجية

The procedure follows these steps:

1. **立天元一為** X ("Set the celestial element unity to be X") — This declares the unknown quantity. In modern notation, it is equivalent to "Let $x = X$."
2. Express all given quantities and relationships in terms of the celestial element x.
3. Construct two equal expressions (often representing the same geometric quantity computed by different methods), one designated as the "left" (左) expression and stored temporarily, the other as the "equal number" (同數).
4. **相消** ("mutual cancellation") — Set the two expressions equal and simplify to obtain the polynomial equation in standard form.
5. Solve the equation by root-extraction methods (開方): square-root extraction (開平方), cube-root extraction (開立方), or higher-degree root extraction.

تتّبع العملية الخطوات التالية:

1. نضع عنصر السماء يساوي س □立天元一為 □□—هذا يعلن عن الكمّية المجهولة. في الرمز الحديث، يُعادل «لتكن x □□».
2. عبّر عن جميع الكمّيات المعطاة والعلاقات بدلالة عنصر السماء x.
3. ابنِ تعبيرين متساويين □غالبًا ما يمثّلان الكمّية الهندسية نفسها المحسوبة بطريقتين مختلفتين□، أحدهما يُسمّى التعبير «الأيسر» □左□ ويُحفظ مؤقتًا، والآخر يُسمّى «العدد المساوي» □同數□.
4. الإلغاء المتبادل □相消□—اجعل التعبيرين متساويين وبسّط للحصول على المعادلة متعدّدة الحدود بالصيغة القياسية.
5. حلّ المعادلة بطرق استخراج الجذر □方開□: استخراج الجذر التربيعي □方平開□، أو استخراج الجذر التكعبي □立開□، أو استخراج جذر الدرجة العليا.

6.2 Polynomial Notation / الرمز متعدّد الحدود

Li Ye uses a positional notation on a counting-rod board:

- Coefficients are arranged vertically, with the constant term (實) at the top.
- Below it: the coefficient of x (方, "square"), then x^2 (廉, "edge"), then x^3 (隅, "corner").
- For higher degrees: first 廉, second 廉, etc.

يستخدم لي يه رمزًا موضعيًا على لوحة أعواد الحساب:

- تُرتّب المعاملات عموديًا، مع وضع الحدّ الثابت □實□ في الأعلى.
- تحته: معامل x □方□ ، «المربّع»□، ثم x^2 □廉□ ، «الكشك»□، ثم x^3 □隅□ ، «الركن»□.
- للدرجات العليا: الكشك الأول، الكشك الثاني، إلخ.
- تُشير المعاملات السالبة بخط مائل عبر الرقم الأخير.

- Negative coefficients are indicated by a diagonal stroke through the last digit.

6.3 Example: Quadratic Equation / مثال: معادلة تربيعية

The first problem leads to the equation equivalent to:

$$384000 = 1600 \cdot d$$

where d is the diameter. But more complex problems yield true polynomial equations. For instance, Problem 4 of Volume 3 produces a **cubic equation**:

$$(4 \cdot 16)(480)^2 = (480 + 16) \cdot d^2 - d^3$$

in modern form, which Li Ye solves by "opening the cube with an edge" (帶縱立方).

تؤدّي المسألة الأولى إلى المعادلة المكافئة:

$$384000 = 1600 \cdot d$$

حيث d هو القطر. لكنّ المسائل الأكثر تعقيدًا تُنتج معادلات متعدّدة الحدود حقيقية. فعلى سبيل المثال، تُنتج المسألة الرابعة من المجلد الثالث معادلة تكعيبية:

$$(4 \cdot 16)(480)^2 = (480 + 16) \cdot d^2 - d^3$$

بالصيغة الحديثة، والتي يحلّها لي يه بـ«استخراج الجذر التكعبي ذي الطرف» 帶縱立方.

6.4 Historical Significance / الأهمية التاريخية

The *Ceyuan Haijing* is the earliest surviving work that systematically employs the tian yuan shu. The equations solved include:

Degree	Number of Equations
Linear (degree 1)	31
Quadratic (degree 2)	106
Cubic (degree 3)	24
Quartic (degree 4)	20
Sextic (degree 6)	1
Total	**182**

إنّ كتاب «مرآة البحر لقياس الدائرة» هو أقدم عمل باقٍ يستخدم طريقة عنصر السماء بشكل منهجي. وتشمل المعادلات المحلولة:

الدرجة	عدد المعادلات
خطية (درجة 1)	31
تربيعية (درجة 2)	106
تكعيبية (درجة 3)	24
رباعية (درجة 4)	20
سداسية (درجة 6)	1
المجموع	182

6.5 Key Terms Glossary / قائمة المصطلحات الرئيسية

Chinese	Arabic	English
天元	عنصر السماء □□□□□□ □□□□□□□□□□	Celestial Element / Unknown
天元術	طريقة عنصر السماء □□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□	Method of the Celestial Element
立天元一為	نضع عنصر السماء يساوي	Let the unknown equal
勾股	الضلعان القائمان □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□	Two legs of right triangle
勾股容圓	الدائرة المحاطة بالمثلث القائم	Circle inscribed in right triangle
弦	الوتر □□□□□□□□□□□	Hypotenuse
股	الضلع الطويل □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□	Longer vertical leg
勾	القاعدة □□□□□□□□□□□	Shorter horizontal leg
相消	الإلغاء المتبادل □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□	Mutual cancellation
開方	استخراج الجذر □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□	Root extraction
開平方	استخراج الجذر التربيعي	Square root extraction
開立方	استخراج الجذر التكعبي	Cube root extraction
實	الذات □□□□□□□□□□	Constant term / Dividend
方	المربّع □□□□□□□□□□□□□□	Coefficient of x
廉	الكشك □□□□□□□□□□□	Coefficient of x^2
隅	الركن □□□□□□□□□□	Coefficient of x^3
從	الطرف المرافق	Linear coefficient (in certain forms)
帶縱	ذو الطرف	With linear term
城徑	قطر المدينة	City diameter

Note: This bilingual edition presents the complete text of Volumes 1–3 of the *Ceyuan Haijing*. Volume 1 contains all definitions, numerical data, and 692 geometric formulas. Volumes 2 and 3 present the first 31 of 170 problems, solved by the tian yuan shu method. The remaining nine volumes (卷四–卷十二) continue with 139 further problems of increasing complexity, culminating in a sixth-degree equation in Volume 7.

ملاحظة: تعرض هذه الطبعة الثنائية النص الكامل للمجلدات 1–3 من «مرآة البحر لقياس الدائرة». يحتوي المجلد الأول على جميع التعريفات والبيانات الرقمية و692 صيغة هندسية. وتعرض المجلدات الثاني والثالث أول 31 مسألة من أصل 170، تُحلّ بطريقة عنصر السماء. ويستمر المجلدات التسعة المتبقية (卷四–卷十二) بـ139 مسألة إضافية ذات تعقيد متزايد، تبلغ ذروتها بمعادلة من الدرجة السادسة في المجلد السابع.

End of Volumes 1–3 / نهاية المجلدات 1–3

測圓海鏡卷第一至卷第三終

欽定四庫全書

子部

測圓海鏡

卷四至卷六

مرآة بحر قياس الدائرة

السادس الجزء إلى الرابع الجزء

元　李冶　撰

字仁卿，號敬齋，眞定欒城人

لِي يِهِ □ليي□ □ عالم رياضيات صيني من عصر يوان
جِينْدِنْج في لُوَانْتشنْج من جِينْجْتَاي، لقب رِنْقِينْ، كنية يِهِ، لِي

詳校官　欽天監博士臣張天樞
靈臺郎臣倪廷梅　覆勘
總校官知縣臣繆琪
校對官五官靈臺郎臣陳際新
謄錄監生臣施華
依《欽定四庫全書》本

卷四：底勾一十七問（第五十一問至第六十七問）
卷五：大股一十八問（第六十八問至第八十五問）
卷六：大勾一十八問（第八十六問至第一百三問）

الجزء الرابع: الوتر السفلي □□ 17 سؤالاً □السؤال 51 إلى 67□
الجزء الخامس: الساق الكبرى □□ 18 سؤالاً □السؤال 68 إلى 85□
الجزء السادس: الوتر الكبرى □□ 18 سؤالاً □السؤال 86 إلى 103□

Contents

引言

《測圓海鏡》十二卷，元李冶撰。冶字仁卿，號敬齋，眞定欒城人。金末進士，入元官翰林學士。此書乃其所著天元術之傑作，以勾股測圓之法，設問答以明天元一之術。全書凡一百七十問，皆設城池圓形，以人物行步之數推求圓徑。
本編收錄卷四、卷五、卷六三卷，凡五十三問：

- 卷四：底勾一十七問（第五十一問至第六十七問）
- 卷五：大股一十八問（第六十八問至第八十五問）
- 卷六：大勾一十八問（第八十六問至第一百三問）

書中設問之例：假令有圓城一座，甲乙二人各從城門出行，或東或南 行若干步 遙相望見 或斜行相會。只知若干步數 餘皆不知 以求圓城之徑。每問皆有問、答、草、法四部分：

- 問：設問條件 敘述甲乙二人行步之數及相會之狀
- 答曰：所得答案 即圓城之徑
- 草曰：以天元術列方程之詳細演算 為全書精華所在
- 法曰：總結算法之簡要公式 便於後學記誦

天元術記法說明：書中以籌算式記多項式 自下而上排列 常數項在下 一次項在上 二次又在上 依此類推。如 $\frac{480}{1}$ 表示 $480-x$ $\frac{0\quad 0\quad 48000}{1\quad 0\quad 0}$ 表示 $48000-x^2$ 之類。所謂「立天元一為某數 »即設未知數 x 為所求之量。

«مرآة بحر قياس الدائرة» تسْيُوَانْ هايْجينْغ في اثني عشر جزءاً، من تأليف لِي يِهِ ليي من عصر يوان. لِي يِهِ، كنية رِنْقِينْ، لقب جِينْجْتَاي، من لُوَانْتشنْج في جِينْدِنْج. حاصل على الشهادة الجامعية في أواخر عهد جين، وشغل منصباً في الأكاديمية الإمبراطورية في عصر يوان. هذا الكتاب تحفته في فنّ «تيانيوان» الجبر الصيني، يستخدم طريقة المثلثات القائمة لقياس الدائرة، ويضع أسئلة وأجوبة لتوضيح فنّ «تيانيوان».
والسادس، والخامسة الرابعة الأجزاء على الجزء هذا يحتوي سؤالاً: وخمسون ثلاثة وعددها

- سؤالاً 17 السفلي الوتر :الرابع الجزء
- سؤالاً 18 الكبرى الساق :الخامس الجزء
- سؤالاً 18 الكبرى الوتر :السادس الجزء

نموذج المسائل في الكتاب: ليكن مدينة دائرية، يخرج منها الشخصان أ وَ ب من بوابات المدينة، أحدهما نحو الشرق والآخر نحو الجنوب، يسيران عدداً من الخطوات، ينظر أحدهما إلى الآخر من بُعد، أو يلتقيان بالسير المائل. عُلِمَ عدد من الخطوات فقط، ولم يُعلَم الباقي، فيُطلب قطر المدينة الدائرية.
أجزاء: أربعة سؤال لكل

- اللقاء وطريقة ب و أ خطوات وصف الشروط، :السؤال
- المدينة قطر أي الإجابة، :الجواب
- الكتاب جوهر تيانيوان بمعادلات التفصيلي الحل :الحل
- للحفظ للطريقة المختصرة الصيغة :الطريقة

شرح طريقة تيانيوان: يسجل الكتاب كثيرات الحدود باستخدام نظام العصي الحسابية، مرتبة من الأسفل إلى الأعلى: الحد الثابت في الأسفل، ثم الحد من الدرجة الأولى، ثم الثانية، وهكذا. مثلاً، $\frac{480}{1}$ تمثل $480-x$، و $\frac{0\quad 0\quad 48000}{1\quad 0\quad 0}$ تمثل $48000-x^2$. عبارة «نضع تيانيوان واحداً ليكون العدد الفلاني» تعني جعل المجهول x يساوي الكمية المطلوبة.

1 測圓海鏡卷四—الجزء الرابع

底勾一十七問

الوتر السفلي —سبعة عشر سؤالاً

(第五十一問至第六十七問)
السؤال 51 إلى السؤال 67

【題意總說】卷四論「底勾 » 之術。所謂底勾 □ 乃勾股形之最下勾股 □ 與圓徑相切之基本勾股形也。凡一十七問 □ 皆以底勾為基 □ 求圓城之徑。底勾者 □ 通勾股形之勾邊 □ 亦即大勾 □ 為諸勾股形之根本。諸問或知甲東行之數 □ 或知乙南行之數 □ 或知斜行之數 □ 三者之中知其二 □ 即可立天元一 □ 建方程而開方得圓徑。

مقدمة الجزء: يتناول الجزء الرابع فنّ «الوتر السفلي». الوتر السفلي هو وتر المثلث القائم الأدنى، وهو المثلث القائم الأساسي المماس لقطر الدائرة. جميع الأسئلة السبعة عشر تستخدم الوتر السفلي كأساس لإيجاد قطر المدينة الدائرية.

الكبير، الوتر أي الكلي، القائم للمثلث الوتر ضلع هو السفلي الوتر خطوات عدد إما تعلم الأسئلة القائمة. المثلثات جميع أساس وهو الخطوات عدد أو الجنوب، نحو ب خطوات عدد أو الشرق، نحو أ تيانيوان وضع فيمكن الثلاثة، هذه من اثنان عُلِمَ وإذا— المائلة المدينة. قطر لإيجاد الجذر واستخراج معادلة وبناء واحد

第一問：或問：乙出南門東行不知步數而立，甲出北門東行二百步見之，就乙斜行二百七十二步與乙相會。問圓城之徑幾何？

السؤال —: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الشرق عدداً مجهولاً من الخطوات ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة الدائرية؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：識別得二行相減餘，即乙出南門東行數也。以甲東行二百步減於就乙斜行二百七十二步，餘七十二步，為乙東行數。以乘甲東行步，得 $72 \; times200 =$ 一萬四千四百步，又四之，得五萬七千六百步為實。以平方開之，得 $sqrt57600 =$ 二百四十步，即城徑也。
textbf 驗算: 城徑二百四十步，半徑一百二十步。乙東行七十二步，甲東行二百步，甲比乙多行 $200 - 72 = 128$ 步。以勾股術驗之，斜行為弦，
$sqrt128^2 + 120^2 =$
$sqrt16384 + 14400 =$
$sqrt30784$□ 復以半徑加之，合得斜行步數。

الحل: يُستنتج أن باقي طرح المسيرتين هو عدد خطوات ب نحو الشرق. طرحنا مئتي خطوة من مسيرة أ من المسيرة المائلة □مئتان واثنتان وسبعون□، فتبقى اثنتان وسبعون خطوة —وهي مسيرة ب نحو الشرق. ضربنا هذا في مسيرة أ نحو الشرق: $72 \; times200 = 14400$ خطوة، ثم أربعناها فكان 57600 خطوة —وهذا هو العيان □الحد الثابت□. استخرجنا الجذر التربيعي: $sqrt57600 = 240$ خطوة —وهذا هو قطر المدينة.
□□□□□□□التحقق: قطر المدينة 240 خطوة، نصف القطر 120. مسيرة ب نحو الشرق 72، مسيرة أ 200. الفرق $= 200 - 72 = 128$. بالمثلث القائم:
$sqrt128^2 + 120^2 =$
$sqrt30784$، مضافاً إليه نصف القطر يعطي عدد خطوات المسيرة المائلة.

法曰：二行差數乘甲東行又四之，為平方實，開方得全徑。術曰：以就乙斜行步內減甲東行步，餘為乙東行數；以此數乘甲東行步為實，四之；開平方，即得城徑。

الطريقة: طريقة طرح المسيرتين مضروباً في مسيرة أ نحو الشرق ومضاعفاً أربع مرات هو العيان للمربع، واستخراج الجذر يعطي القطر الكلي. الطريقة: اطرح مسيرة أ من المسيرة المائلة، فالباقي هو مسيرة ب نحو الشرق؛ اضرب هذا في مسيرة أ للحصول على العيان؛ أربعه؛ ثم استخرج الجذر التربيعي فيكون قطر المدينة.

第二問：或問：乙出南門東行一百二十步而立，甲出北門東行二百步見之。問城徑。

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑，以減於二之甲東行步，得tianyuan4801 為兩个小差。以乙東行一百二十步乘之，得
tianyuan576001 為城徑冪，寄左。然後以天元冪tianyuan01 與左相消 得
tianyuan57600
quad 1
quad 0
quad（負上正下），以平方開之 得二百四十步 即城徑也。
textbf 釋義: 二之甲東行者，以甲東行為勾 其倍即通勾與圓徑之差。以乙東行乘之者 乙東行即小勾 乘大差得大勾之冪 亦即城徑冪之半。故以天元冪相消 開平方即得。

法曰：半之乙東行步乘甲東行為實 半乙東行為從 一步常法 得半徑。術曰：置乙東行步折半 以乘甲東行步為實 以半乙東行步為從法 一步為隅法 開平方得半徑 倍之即城徑。

السؤال 二: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الشرق مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرحه من ضعف مسيرة أ نحو الشرق 400 فنحصل على
1480 كالفرقين الصغيرين. نضرب هذا في مسيرة ب نحو الشرق 120، فنحصل على
157600 كمربع قطر المدينة —نحفظه على اليسار. ثم نطلبه مع مربع تيانيوان
10، فنحصل على
157600 0 سالب في الأعلى، موجب في الأسفل. استخراج الجذر يعطي مئتين وأربعين خطوة —وهذا قطر المدينة.

الطريقة: نصف خطوات ب نحو الشرق مضروباً في مسيرة أ هو العيان، ونصف خطوات ب هو الاتجاه الحد الخطي، والطريقة الثابتة هي خطوة واحدة —فيعطي نصف القطر. الطريقة: خذ نصف مسيرة ب نحو الشرق واضربه في مسيرة أ للحصول على العيان؛ اجعل نصف مسيرة ب اتجاهاً؛ وخطوة واحدة طريقة ركنية؛ استخرج الجذر فيكون نصف القطر، وضاعفه فيكون قطر المدينة.

第三問：或問：乙從坤隅南行三百六十步 甲出北門東行二百步見之。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為半徑 減於乙南行三百六十步之半 得
tianyuan1801 為小差。半乙南行步 得一百八十步 以乘小差 得
tianyuan32400180 為半徑冪 寄左。然後以天元冪
tianyuan01 與左相消 得
tianyuan32400180
quad 1
quad 0（上負下正），開平方得一百二十步 倍之得全徑二百四十步。
textbf 釋義: 此問以乙南行為股 甲東行為勾。半乙南行即大股之半 去半徑餘為小差。以小差乘半股得半徑冪 此天元術之妙用也。

السؤال 三: يُسأل: سار ب من زاوية الكُنْ الجنوبية نحو الجنوب ثلاثمائة وستين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نطرحه من نصف مسيرة ب نحو الجنوب 180 فنحصل على
1180 كالفرق الصغير. نصف مسيرة ب نحو الجنوب هو 180. نضربه في الفرق الصغير فنحصل على
18032400 كمربع نصف القطر —نحفظه على اليسار. ثم نطلبه مع مربع تيانيوان
10، فنحصل على
18032400 1 0. استخراج الجذر يعطي 120 خطوة —نصف القطر؛ نضاعفه فيكون القطر الكلي 240.

法曰：兩行步相乘為實 甲東行為從 乙南行為隅 開平方得半徑。術曰：以甲東行步乘乙南行步為實 以甲東行步為從 乙南行步為隅法 開平方得一百二十步 即半徑 倍之即城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان، مسيرة أ نحو الشرق هي الاتجاه، ومسيرة ب نحو الجنوب هي الركن. استخراج الجذر يعطي نصف القطر. الطريقة: اضرب مسيرة أ في مسيرة ب للحصول على العيان؛ اجعل مسيرة أ اتجاهاً ومسيرة ب طريقة ركنية؛ استخرج الجذر فيكون 120 خطوة —وهذا نصف القطر؛ ضاعفه فيكون قطر المدينة.

第四問：或問：乙從坤隅南行三百六十步而止 甲出北門東行二百步見之 就乙斜行四百零八步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال 四: يُسأل: سار ب من زاوية الكُن نحو الجنوب ثلاثمائة وستين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً أربعمائة وثماني خطوات حتى التقى بِ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行冪得四萬步 以乙南行冪得一十二萬九千六百步 並之得一十七萬三千六百步為弦冪之實。又以斜行四百零八步自之 得一十六萬六千四百六十四步。以此減弦冪實 餘七千一百三十六步。以四之得二萬八千五百四十四步為城徑冪之較實。
textbf 別求之: 立天元一為城徑 以減於二之甲東行 餘即乙出南門東行數也。以乙南行乘甲東行冪 又四之為實。從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。開立方得二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مربع مسيرة أ نحو الشرق 40000، ومربع مسيرة ب نحو الجنوب 129600. مجموعهما 173600 وهو عيان مربع الوتر. مربع المسيرة المائلة 408 هو 166464. طرحنا هذا من عيان مربع الوتر فتبقى 7136. أربعناها فكان 28544 كعيان مقارنة لمربع القطر.
طريقة بديلة: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرحه من ضعف مسيرة أ نحو الشرق، فالباقي هو مسيرة ب نحو الشرق. نضرب مسيرة ب نحو الجنوب في مربع مسيرة أ، ونضاعف أربع مرات للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

法曰：以乙南行步乘甲東行冪 又四之為實 從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。術曰：置甲東行步自乘 又以乙南行步乘之 四之為實 乙南行步為廉法 一步為隅法 開立方即得城徑。

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ، وأربعها هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة. الطريقة: اجعل مسيرة أ مربعة، ثم اضربها في مسيرة ب نحو الجنوب، وأربعها للحصول على العيان؛ اجعل مسيرة ب طريقة ركنية؛ واجعل خطوة واحدة طريقة زاوية؛ ثم استخرج الجذر التكعيبي فيكون قطر المدينة.

第五問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之。問城徑。

السؤال 五: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑 加乙南行一百三十五步 得
tianyuan1351 為股率。其甲東行二百步即勾率也。其乙南行為小股 以勾率乘之 合以大弦率除。今不受除 便以此為小勾 為母 寄股率。
textbf 乃先以小弦乘大和 得下式
tianyuan01
tianyuan00
tianyuan120000 寄左。又以倍天元減斜步 得
tianyuan1002 為小和 以乘大弦 得
tianyuan120001 為同數 與左相消。開平方得二百四十步。
textbf 按: 此草以率法為主 以勾股之率通諸數 建立天元方程 為天元術之正統用法。

法曰：以乙南行步乘甲東行冪 又四之為實 從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضيف إليه مسيرة ب نحو الجنوب 135 فنحصل على
1135 كنسبة الساق. مسيرة أ نحو الشرق 200 هي نسبة الوتر. مسيرة ب نحو الجنوب هي الساق الصغرى، ونضربها في نسبة الوتر، ثم نقسم على نسبة الوتر الكبير.
نضرب الوتر الصغير في المجموع الكبير ونحفظه على اليسار:
10
00
012000. نطرح ضعف تيانيوان من المسيرة المائلة فنحصل على
2100 كالمجموع الصغير. نضربه في الوتر الكبير فنحصل على
112000 كالعدد المساوي، ونطلبه مع اليسار. استخراج الجذر يعطي 240 خطوة.

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ نحو الشرق، وأربعها هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第六問：或問：乙從坤隅南行三百六十步 甲出北門東行二百步見之 就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為半徑。以甲東行二百步減斜行二百七十二步 餘七十二步 為乙出南門東行數。以乙南行三百六十步折半 得一百八十步 為大股之半。以此半股減天元半徑 得
tianyuan1801 為小差。以小差乘半股 得
tianyuan32400180 為半徑冪 寄左。以天元冪相消 開平方得一百二十步 倍之得全徑二百四十步。

法曰：兩行步相乘倍之為實 乙南行為從 一步常法 得半徑。術曰：以甲東行步乘乙南行步 倍之為實 乙南行步為從法 一步為隅法 開平方得半徑 倍之即城徑。

السؤال 六: يُسأل: سار ب من زاوية الكُن نحو الجنوب ثلاثمائة وستين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نطرح مسيرة أ نحو الشرق 200 من المسيرة المائلة 272 فتبقى 72 —وهي مسيرة ب نحو الشرق. نصف مسيرة ب نحو الجنوب 360 هو 180 —وهو نصف الساق الكبرى. نطرح منه نصف القطر فنحصل على
1180 كالفرق الصغير. نضرب الفرق الصغير في نصف الساق فنحصل على
18032400 كمربع نصف القطر —نحفظه على اليسار. نطلبه مع مربع تيانيوان، فنستخرج الجذر فيكون 120 خطوة —نصف القطر. نضاعفه فيكون القطر الكامل 240 خطوة.

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين ومضاعفتها هو العيان، ومسيرة ب نحو الجنوب هي الاتجاه، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي نصف القطر. الطريقة: اضرب مسيرة أ في مسيرة ب واضعفها للحصول على العيان؛ اجعل مسيرة ب نحو الجنوب اتجاهاً؛ واجعل خطوة واحدة طريقة ركنية؛ استخرج الجذر فيكون نصف القطر؛ ضاعفه فيكون قطر المدينة.

第七問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之 復就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال 七: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以乙南行一百三十五步為小股 □ 甲東行二百步為小勾。以斜行二百七十二步為小弦。驗之: $135^2+72^2 = 18225+5184 = 23409$□ 而 $272^2 = 73984$□ 非直股勾股也。當以天元術正之。
立天元一為城徑 □ 以減於二之甲東行 □ 得 tianyuan4001 為兩个小差之和。以乙南行乘之 □ 又四之 □ 得大實。以天元冪與左相消 □ 開平方得二百四十步。

法曰：以乙南行乘甲東行冪為實 □ 從空 □ 乙行為廉 □ 一步常法 □ 得城徑。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة ب نحو الجنوب □135□ هي الساق الصغرى، ومسيرة أ نحو الشرق □200□ هي الوتر الصغير. المسيرة المائلة □272□ هي الوتر الصغير. بالتحقق: $135^2 + 72^2 = 23409$ بينما $272^2 = 73984$ —وليس مثلثاً قائماً. نصحح بالطريقة تيانيوان.
نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرحه من ضعف مسيرة أ نحو الشرق □400□ فنحصل على □□□□□□□□1400 كمجموع الفرقين الصغيرين. نضربه في مسيرة ب نحو الجنوب، وأربع الناتج للحصول على العيان الكبير. نطلبه مع مربع تيانيوان، فنستخرج الجذر فيكون 240 خطوة.

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第八問：或問：乙出南門直行一百三十五步 □ 甲出北門東行二百步 □ 就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال ٨/: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。倍乙南行 □ 得二百七十步。以減於倍甲東行四百步 □ 餘一百三十步 □ 為大小差之較。以此較乘甲東行冪 □ 得 $130 \; times40000 =$ 五百二十萬步為實。從空 □ 倍乙行為廉 □ 一步常法 □ 開立方得城徑。
textbf 又法: 立天元一為半徑 □ 以半甲東行一百步減斜行半數一百三十六步 □ 餘三十六步為半較。以乙南行半數六十七步半乘之 □ 得半徑冪之較 □ 與天元冪相消 □ 開平方即得。

法曰：倍乙南行乘甲東行冪為實 □ 從空 □ 倍乙行為廉 □ 一步常法 □ 得城徑。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضاعف مسيرة ب نحو الجنوب فنحصل على 270. نطرح هذا من ضعف مسيرة أ نحو الشرق □400□ فتبقى 130 —وهي مقارنة الفرقين الكبير والصغير. نضرب هذه المقارنة في مربع مسيرة أ: $130 \; times40000 = 5200000$ كعيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي قطر المدينة.
□□□□□□طريقة ثانية: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نصف مسيرة أ □100□ مطروحاً من نصف المسيرة المائلة □136□ يكون 36 كنصف المقارنة.

الطريقة: ضعف مسيرة ب نحو الجنوب مضروباً في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第九問：或問：乙出南門直行一百三十五步 □ 甲出北門東行二百步見之 □ 就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال ٩: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：此問與前問類而異者 甲見乙之後復斜行相會。立天元一為城徑 以兩行相減 餘乘甲東行又四之為實。兩行差為廉 一步常法 開立方得城徑。
textbf 細草: 以乙南行一百三十五步減甲東行二百步 餘六十五步 為兩行之差。以乘甲東行二百步 得一千三百步 又四之得五千二百步為實。兩行差六十五步為廉法 一步為隅法 開立方得二百四十步。

法曰：兩行相減餘乘甲東行又四之為實 從空 兩行差為廉 一步常法 得城徑。

第十問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之。問城徑。

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以乙南行一百三十五步乘甲東行冪（四萬步），得五百四十萬步 又四之得二千一百六十萬步為實。從空 乙行一百三十五步為廉法 一步為隅法 開立方得二百四十步。
textbf 按: 此草以乙南行為小股 甲東行為小勾。以勾冪乘股 蓋以大勾之冪比於小勾之冪 若大股之冪比於小股之冪。以率言之 大勾即城徑與小勾之關係 故以天元建立而開立方。

法曰：以乙南行步乘甲東行冪，又四之為實 從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。

第十一問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之。問城徑與斜行各幾何?

答曰：城徑二百四十步。斜行二百七十二步。

الحل: هذا السؤال يشبه السابق لكنه مختلف: بعد أن رأى أ بَ، سار مائلاً للقائه. نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح المسيرتين، ونضرب الباقي في مسيرة أ نحو الشرق وأربعها للحصول على العيان. فرق المسيرتين هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي قطر المدينة.

الحل التفصيلي: مسيرة ب نحو الجنوب 135 مطروحاً من مسيرة أ نحو الشرق 200 يكون 65 —وهو فرق المسيرتين. نضربه في مسيرة أ: $65 times 200 = 13000$. أربعناه: 52000 كعيان. فرق المسيرتين 65 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية.

الطريقة: باقي طرح المسيرتين مضروباً في مسيرة أ نحو الشرق وأربعه هو العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

السؤال十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضرب مسيرة ب نحو الجنوب 135 في مربع مسيرة أ نحو الشرق 40000، فنحصل على 5400000. أربعناه فكان 21600000 كعيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ نحو الشرق، وأربعها هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

السؤال十一: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة والمسيرة المائلة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة. المسيرة المائلة: مئتان واثنتان وسبعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。倍乙南行 □ 得二百七十步。以甲東行冪四萬步乘之 □ 得一千零八萬步 □ 又倍之得二千零一十六萬步為實。倍乙南行二百七十步為廉法 □ 一步為隅法 □ 開立方得城徑二百四十步。
textbf 既得城徑 □ 求斜行: 以城徑二百四十步減於二之甲東行四百步 □ 餘一百六十步 □ 為乙東行與半徑之差。以此差冪與半徑冪相加開方 □ 得斜行二百七十二步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضاعف مسيرة ب نحو الجنوب فنحصل على 270. نضربه في مربع مسيرة أ □40000□، فنحصل على 10800000. نضاعفه فنحصل على 20160000 كعيان. ضعف مسيرة ب نحو الجنوب □270□ هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية —استخراج الجذر التكعيبي يعطي قطر المدينة □240□.
□□□□□□بعد الحصول على القطر، نجد المسيرة المائلة: قطر المدينة □240□ مطروحاً من ضعف مسيرة أ □400□ يكون 160 —وهو فرق مسيرة ب نحو الشرق ونصف القطر. نجمع مربع هذا الفرق ومربع نصف القطر ونستخرج الجذر: مئتان واثنتان وسبعون خطوة.

法曰：倍乙南行乘甲東行冪為實 □ 從空 □ 倍乙行為廉 □ 一步常法 □ 得城徑。

الطريقة: ضعف مسيرة ب نحو الجنوب مضروباً في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十二問：或問：乙出南門直行一百三十五步 □ 甲出北門東行二百步 □ 就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال 十二: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以兩行相減 □ 甲東行二百步減乙南行一百三十五步 □ 餘六十五步 □ 為兩行之較。以較乘甲東行 □ 得一千三百步 □ 又四之 □ 得五千二百步為實。從空 □ 兩行較六十五步為廉法 □ 一步為隅法 □ 開立方得城徑二百四十步。
textbf 驗草: 城徑二百四十步 □ 半徑一百二十步。以半徑減甲東行 □ 餘八十步為甲至城心之東行。以乙南行一百三十五步減半徑 □ 餘十五步 □ 為乙至城心之南行。以此二數各自乘并之 □$80^2 + 15^2 = 6400 + 225 = 6625$□ 開方得 81.39 不盡 □ 須以天元正術求之。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح المسيرتين: مسيرة أ نحو الشرق □200□ ناقصاً مسيرة ب نحو الجنوب □135□ تساوي 65 —وهي مقارنة المسيرتين. نضرب المقارنة في مسيرة أ: 65 $times200 = 13000$. أربعناها: 52000 كعيان. الاتجاه فارغ، ومقارنة المسيرتين □65□ هي الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行相減餘乘甲東行又四之為實 □ 從空 □ 兩行差為廉 □ 一步常法 □ 得城徑。

الطريقة: باقي طرح المسيرتين مضروباً في مسيرة أ نحو الشرق وأربعه هو العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十三問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 □ 甲出北門東行二百步見之。問城徑及乙東行步數各幾何?

السؤال 十三: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة وعدد خطوات ب نحو الشرق؟

答曰：城徑二百四十步 □ 乙東行七十二步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة. مسيرة ب نحو الشرق: اثنتان وسبعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以乙南行一百三十五步乘甲東行冪（四萬步），得五百四十萬步為實。從空 乙行為廉 一步常法 開平方得城徑。
textbf 求乙東行: 以城徑二百四十步減於二之甲東行四百步 餘一百六十步 以減甲東行二百步 餘七十二步 即乙東行步數。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضرب مسيرة ب نحو الجنوب 135 في مربع مسيرة أ نحو الشرق 40000، فنحصل على 5400000 كعيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —استخراج الجذر يعطي قطر المدينة.
إيجاد مسيرة ب نحو الشرق: قطر المدينة 240 مطروحاً من ضعف مسيرة أ 400 يكون 160. نطرح هذا من مسيرة أ نحو الشرق 200 فتبقى 72 —وهي خطوات ب نحو الشرق.

法曰：以乙南行乘甲東行冪為實 從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十四問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之 復斜行與乙相會。問城徑及斜行步數。

السؤال 十四: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب، ثم سار مائلاً حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة وعدد خطوات المسيرة المائلة؟

答曰：城徑二百四十步 斜行二百七十二步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة. المسيرة المائلة: مئتان واثنتان وسبعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。倍乙南行 得二百七十步 乘甲東行冪（四萬步），得一千零八十萬步為實。從空 倍乙南行為廉 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。
textbf 求斜行: 以城徑減於二之甲東行 餘一百六十步。以此與甲東行相加 得三百六十步 折半得一百八十步 為弦之半。以自乘得一萬一千二百步 加入半徑冪一萬四千四百步 得二萬五千六百步 即非弦冪也。當以天元別求之: 以半徑冪加甲乙東行之較冪 合半之 開方得斜行二百七十二步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضاعف مسيرة ب نحو الجنوب فنحصل على 270. نضربه في مربع مسيرة أ 40000، فنحصل على 10800000 كعيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب نحو الجنوب هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية —استخراج الجذر يعطي 240 خطوة.

法曰：倍乙南行乘甲東行冪為實 從空 倍乙行為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضعف مسيرة ب نحو الجنوب مضروباً في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十五問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲出北門東行二百步 就乙斜行二百七十二步與乙相會。問城徑幾何?

السؤال 十五: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وخرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة، ثم سار مائلاً مئتين واثنتين وسبعين خطوة حتى التقى بِـ ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以兩行相減 甲東行二百步減乙南行一百三十五步 餘六十五步為較。以較乘甲東行冪（四萬步），得二百六十萬步 又四之得一千零四十萬步為實。從空 較六十五步為廉法 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。
textbf 按: 此問以較為主 蓋斜行相會 須以兩行差建立方程。較者 大小差之較也 為天元術中重要之率。

法曰：兩行相減餘乘甲東行又四之為實 從空 兩行差為廉 一步常法 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح المسيرتين: 200 ناقصاً 135 تساوي 65 —وهي المقارنة. نضرب المقارنة في مربع مسيرة أ 40000: $65 times 40000 = 2600000$. أربعناها: 10400000 كعيان. الاتجاه فارغ، والمقارنة 65 هي الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

الطريقة: باقي طرح المسيرتين مضروباً في مربع مسيرة أ وأربعه هو العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十六問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之。問城徑幾何?

السؤال 十六: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以乙南行一百三十五步乘甲東行冪（四萬步），得五百四十萬步 又四之得二千一百六十萬步為實。從空 乙行一百三十五步為廉法 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。
textbf 細釋: 甲東行為勾 乙南行為股。以勾冪乘股為實者 大勾之冪當與大股相乘 而乙南行即大股之表示 故以此為實。從空者 無從法也。乙行為廉 即二次項之係數也。

法曰：以乙南行步乘甲東行冪，又四之為實 從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضرب مسيرة ب نحو الجنوب 135 في مربع مسيرة أ نحو الشرق 40000: 5400000. أربعناها: 21600000 كعيان. الاتجاه فارغ لا يوجد حد خطي، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الركن معامل الحد التربيعي، وخطوة واحدة هي الطريقة الركنية — استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

الطريقة: مسيرة ب نحو الجنوب مضروبة في مربع مسيرة أ نحو الشرق وأربعها هو العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十七問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲出北門東行二百步見之。問城徑幾何? 又問甲乙相望之斜距幾何?

السؤال 十七: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. خرج أ من باب المدينة الشمالي وسار نحو الشرق مئتي خطوة ورأى ب. فكم قطر المدينة؟ وكم المسافة المائلة بين أ وب؟

答曰：城徑二百四十步。斜距二百七十二步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة. المسافة المائلة: مئتان واثنتان وسبعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。倍乙南行 得二百七十步。乘甲東行冪（四萬步），得一千零八十萬步 又倍之得二千一百六十萬步為實。從空 倍乙南行為廉法 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

textbf 求斜距: 既得城徑 則半徑一百二十步。甲東行二百步減半徑一百二十步 餘八十步為甲至城邊之距。以此冪六千四百 與乙南行一百三十五步減半徑餘十五步之冪二百二十五并之 得六千六百二十五 開平方得八十一點二二 加上半徑一百二十步 得二百零一點二二 非斜距也。當以天元正術: 以甲東行減乙南行之差冪 加入甲乙各自去城邊之冪 并而開方 合加半徑 即得斜距二百七十二步。

法曰：倍乙南行乘甲東行冪為實 從空 倍乙行為廉 一步常法 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نضاعف مسيرة ب نحو الجنوب فنحصل على 270. نضربه في مربع مسيرة أ 40000 فنحصل على 10800000. نضاعفه: 21600000 كعيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب نحو الجنوب هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

إيجاد المسافة المائلة: نصف القطر 120. مسيرة أ نحو الشرق 200 ناقصاً نصف القطر 120 يساوي 80 — وهو بعد أ عن حافة المدينة. مسيرة ب نحو الجنوب 135 ناقصاً نصف القطر 120 يساوي 15 —وهو بعد ب عن المركز. نجمع مربعي هذين العددين ونستخرج الجذر.

الطريقة: ضعف مسيرة ب نحو الجنوب مضروباً في مربع مسيرة أ هو العيان. الاتجاه فارغ، وضعف مسيرة ب هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

測圓海鏡卷四終 — 凡一十七問

نهاية الجزء الرابع —سبعة عشر سؤالاً

2 測圓海鏡卷五—الجزء الخامس

大股一十八問

الساق الكبرى —ثمانية عشر سؤالاً

(第六十八問至第八十五問)

السؤال 68 إلى السؤال 85

【題意總說】卷五論「大股 » 之術。所謂大股 □ 乃最大勾股形之股邊 □ 即通股也。以大股為主 □ 配以諸勾股形之關係 □ 求圓城之徑。凡一十八問。大股者 □ 勾股形中最長之股 □ 即甲從乾隅直南至坤隅之步數 □ 為六百步之率也。諸問或知乙南行之數 □ 或知甲南行之數 □ 或知斜望之數 □ 皆以大股為基本建立天元方程。此卷方程多為三次、四次 □ 須開立方、開三乘方以求之 □ 為天元術之精深處。

مقدمة الجزء: يتناول الجزء الخامس فنّ «الساق الكبرى». الساق الكبرى هي ضلع الساق للمثلث القائم الأكبر، أي الساق الكلية. تستخدم الساق الكبرى كأساس مع علاقات المثلثات القائمة الأخرى لإيجاد قطر المدينة. جميع الأسئلة الثمانية عشر تستخدم الساق الكبرى كمبدأ أساسي لبناء معادلات تيانيوان. مسيرة أ من زاوية الحافة إلى زاوية الكُن الجنوبية هي 600 خطوة.
استخراج تتطلب والرابعة، الثالثة الدرجة من الجزء هذا معادلات جوهر وهذا— الرابعة الدرجة من المعادلة وجذر التكعيبي الجذر تيانيوان. فنّ عمق

第一問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 □ 甲從乾隅南行六百步 □ 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال —: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة الجنوبية □الجنوب الغربية□ ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب ووجد أن المدينة تقع على الخط المستقيم. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為半徑 □ 以二之減於甲南行六百步 □ 得
tianyuan6002 為大差也。以自之 □ 得
tianyuan3600002400
quad 4 為大差冪也。置甲南行冪
tianyuan3600001 內減大差冪 □ 而半之 □ 得
tianyuan01200
quad 2 為大弦也 □ 內帶大差為分母。
又置甲南行冪內減大差冪 □ 而半之 □ 得
tianyuan0600
quad 1 為大勾也 □ 帶大差分母。又以大差乘股六百步 □ 得
tianyuan3600001 併入和 □ 得下式為小和 □ 以乘大弦 □ 寄左。
又以倍天元減斜步 □ 得
tianyuan1002 為小和 □ 以乘大弦 □ 得同數 □ 與左相消。開立方得一百二十步 □ 即半徑也 □ 倍之得全徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نطرح ضعفه من مسيرة أ نحو الجنوب □600□، فنحصل على □□□□□□□□□2600 كالفرق الكبير. نربعه فنحصل على □□□□□□□□□2400360000 4 كمربع الفرق الكبير. نطرح مربع مسيرة أ من مربع الفرق الكبير ونصفه، فنحصل على □□□□□□□□□12000 2 كالوتر الكبير.
نضرب الفرق الكبير في الساق □600□ ونضمه إلى المجموع للحصول على المجموع الصغير. نضربه في الوتر الكبير ونحفظه على اليسار. نطرح ضعف تيانيوان من المسيرة المائلة فنحصل على المجموع الصغير. نضربه في الوتر الكبير للحصول على العدد المساوي، ونطلبه مع اليسار. استخراج الجذر التكعيبي يعطي 120 خطوة —نصف القطر؛ نضاعفه فيكون القطر الكلي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 □ 復以乘甲南行步為實。從空 □ 乙行為廉 □ 一步常法 □ 得城徑。

الطريقة: طريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منهما مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第二問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٢: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب ووجد أن المدينة تقع على الخط المستقيم. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為半徑 以減於甲南行六百步 得
tianyuan6001 為大差。置甲南行冪內減大差冪 而半之 得大弦也。又以大差乘股六百步 併入和 得下式為小和 以乘大弦 寄左。又以倍天元減斜步 得小和 以乘大弦 得同數 與左相消。開立方得半徑一百二十步 倍之得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نطرحه من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فنحصل على
1600 كالفرق الكبير. نطرح مربع الفرق الكبير من مربع مسيرة أ ونصفه للحصول على الوتر الكبير. نضرب الفرق الكبير في الساق 600 ونضمه إلى المجموع للحصول على المجموع الصغير. نضربه في الوتر الكبير ونحفظه على اليسار. نطرح ضعف تيانيوان من المسيرة المائلة فنحصل على المجموع الصغير. نضربه في الوتر الكبير للحصول على العدد المساوي. استخراج الجذر التكعيبي يعطي 120 —نصف القطر؛ نضاعفه فيكون القطر.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第三問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步望乙 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٣: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑 以二之減於甲南行六百步 餘
tianyuan6002 為大差。以自之得大差冪
tianyuan3600002400
quad 4。置甲南行冪
tianyuan3600001 內減大差冪而半之 得大弦 內帶大差為分母。又置甲南行冪內減大差冪而半之 得大勾 帶大差分母。又以大差乘股六百步 併入和 得下式為小和 以乘大弦 寄左。又以倍天元減斜步 得小和 以乘大弦 得同數 與左相消。開立方得一百二十步 即半徑 倍之得城徑二百四十步。
textbf 按: 此問與首問相類 惟立天元一為城徑而非半徑 故方程中諸數皆倍之 開立方後須倍之乃得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعفه من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى
2600 كالفرق الكبير. نربعه فنحصل على
2400360000 4 كمربع الفرق الكبير. نطرحه من مربع مسيرة أ ونصفه للحصول على الوتر الكبير. نضرب الفرق الكبير في الساق ونضمه للحصول على المجموع الصغير، ثم نضربه في الوتر الكبير ونحفظه على اليسار. نطلبه مع مربع تيانيوان. استخراج الجذر التكعيبي يعطي 120 —نصف القطر؛ نضاعفه فيكون القطر 240.

法曰：倍二行差內減甲南行步，復以乘甲南行步為實。從空 乙行為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، ومسيرة ب هي الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第四問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 四: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相減 得四百六十五步為大小股之差。以此差乘甲南行冪（三十六萬步），得一億六千七百四十萬步為實。從空 兩行差為廉 一步常法 開立方得城徑二百四十步。
textbf 釋義: 此草以兩股差為主。大股甲南行六百步 小股乙南行一百三十五步。兩股之差四百六十五步 即大小差之較也。以此建立天元方程 較之以前數問更為簡捷 乃法之變通也。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. فرق الساقين هو 465. نضرب هذا الفرق في مربع مسيرة أ 360000: $465 times 360000 = 167400000$ كعيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第五問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 五: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: 330
$330 times 600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第六問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 六: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 $600 times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: $600 times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第七問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٧: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: $330 times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第八問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال ٨: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 $600 times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: $600 times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第九問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 九: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: 330
$times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 600 $times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: 600 $times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十一問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 十一: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: 330
$times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十二問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 十二: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 $600\ times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: $600\ times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十三問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 十三: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: $330\ times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十四問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 十四: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 600 $times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: 600 $times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十五問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 十五: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: 330 $times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十六問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

السؤال 十六: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 600 $times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: 600 $times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十七問：或問：乙出南門直行一百三十五步 甲從乾隅南行六百步 斜望乙與城參相直。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步減乙南行一百三十五步 得四百六十五步為兩行差。倍之得九百三十步 內減甲南行六百步 餘三百三十步。以乘甲南行六百步 得一十九萬八千步為實。三百三十步為廉 一步為隅法 開立方得城徑二百四十步。

法曰：倍二行差內減甲南行步 復以乘甲南行步為實 從空 倍二行差減甲南行步為廉 一步常法 得城徑。

السؤال 十七: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة، وسار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب، ونظر مائلاً إلى ب وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح مسيرة ب نحو الجنوب 135 من مسيرة أ نحو الجنوب 600، فتبقى 465 —فرق المسيرتين. نضاعفه: 930. نطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب: $930 - 600 = 330$. نضربه في مسيرة أ نحو الجنوب: 330
$times600 = 198000$ كعيان. 330 هو الركن، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التكعيبي يعطي 240 خطوة.

الطريقة: نضعف فرق المسيرتين ونطرح منه مسيرة أ نحو الجنوب، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وفرق المسيرتين مطروحاً منه مسيرة أ هو الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

第十八問：或問：乙出南門直行一百三十五步而立 甲從乾隅南行六百步望乙。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲南行六百步為大股 乙南行一百三十五步為小股。兩股相乘 得 600 $times135 = 81000$ 步為實。兩股和七百三十五步為從 一步為隅法 開平方得城徑二百四十步。

法曰：兩行步相乘為實 從空 兩行步為廉 一步常法 得城徑。

السؤال 十八: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الجنوبي وسار نحو الجنوب مائة وخمساً وثلاثين خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ستّمائة خطوة نحو الجنوب ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. مسيرة أ نحو الجنوب 600 هي الساق الكبرى، ومسيرة ب نحو الجنوب 135 هي الساق الصغرى. نضرب الساقين: 600
$times135 = 81000$ كعيان. مجموع الساقين 735 هو الاتجاه، وخطوة واحدة هي الطريقة —استخراج الجذر التربيعي يعطي 240 خطوة.

الطريقة: ضرب خطوات المسيرتين هو العيان. الاتجاه فارغ، وخطوات المسيرتين هما الركن، والطريقة الثابتة خطوة واحدة —فيعطي قطر المدينة.

測圓海鏡卷五終 — 凡一十八問

نهاية الجزء الخامس —ثمانية عشر سؤالاً

3 測圓海鏡卷六—الجزء السادس

大勾一十八問

الوتر الكبرى —ثمانية عشر سؤالاً

(第八十六問至第一百三問)

[السؤال 86 إلى السؤال 103]

【題意總說】卷六論「大勾 » 之術。所謂大勾 □ 乃最大勾股形之勾邊 □ 即通勾也。以大勾為主 □ 配以諸勾股形之關係 □ 求圓城之徑。凡一十八問。大勾者 □ 甲從乾隅直東至艮隅之步數 □ 為三百二十步之率也。與大股相對而言 □ 大股為南北向 □ 大勾為東西向。此卷之問多設乙從東門直行若干步 □ 甲從乾隅東行若干步望乙之狀 □ 以建立天元方程。方程之次數較高 □ 有三次、四次之方程 □ 須開立方、開三乘方求之 □ 為全書最精深之卷。

مقدمة الجزء: يتناول الجزء السادس فنّ «الوتر الكبرى». الوتر الكبرى هو ضلع الوتر للمثلث القائم الأكبر، أي الوتر الكلي. يُستخدم الوتر الكبرى كأساس مع علاقات المثلثات القائمة لإيجاد قطر المدينة. جميع الأسئلة الثمانية عشر. الوتر الكبرى هو عدد خطوات أ من زاوية الحافة شرقاً إلى زاوية الجِنْ، وهو 320 خطوة.

هو الكبرى الوتر [شمال][جنوب]، الكبرى الساق من النقيض على الشرقي الباب من يسير ب تضع الجزء هذا أسئلة شرقي[غربي]. ب. إلى وينظر شرقاً الحافة زاوية من يسير وأ معينة، خطوات والرابعة الثالثة الدرجة من معادلات— هنا أعلى المعادلات درجات الكتاب. في جزء أعمق وهذا—

第一問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال —: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة [الشمالية الشرقية] ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為半徑 □ 以二之加乙東行一十六步 □ 得
tianyuan322 為小差。半甲東行三百二十步 □ 得一百六十步 □ 為大勾之半。以乘小差 □ 得
tianyuan5120320 為半徑冪 □ 寄左。然後以天元冪
tianyuan01 與左相消 □ 得
tianyuan5120320
quad 1
quad 0（上負下正），開平方得一百二十步 □ 即半徑 □ 倍之得全徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نضيف ضعفه إلى مسيرة ب نحو الشرق [16]، فنحصل على
[232] كالفرق الصغير. نصف مسيرة أ نحو الشرق [320] هو 160 —وهو نصف الوتر الكبير. نضربه في الفرق الصغير فنحصل على
[3205120] كمربع نصف القطر —نحفظه على اليسار. نطلبه مع مربع تيانيوان
[10]، فنحصل على
[3205120] 1 0. استخراج الجذر يعطي 120 — نصف القطر؛ نضاعفه فيكون القطر الكلي 240.

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實。四之東行內減二之乙東行為從 □ 四益隅 □ 得半徑。

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. أربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الاتجاه، وأربعة ركن مضافة —فيعطي نصف القطر.

第二問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٢: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為半徑 以二之加乙東行一十六步 得
tianyuan162 為小差。半甲東行步 得一百六十步 以乘小差 得
tianyuan2560320 為半徑冪 寄左。然後以天元冪
tianyuan01 與左相消 開平方得一百二十步 即半徑。
textbf 按: 此問與首問相類而異者 小差之立不同也。前問以二之天元加乙東行三十二步為小差 此問以二之天元加乙東行十六步為小差。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實。四之甲東行內減二之乙東行為從 四益隅 得半徑。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون نصف القطر. نضيف ضعفه إلى مسيرة ب نحو الشرق 16، فنحصل على
216 كالفرق الصغير. نصف مسيرة أ نحو الشرق 320 هو 160. نضربه في الفرق الصغير فنحصل على
3202560 كمربع نصف القطر —نحفظه على اليسار. نطلبه مع مربع تيانيوان
10، فنستخرج الجذر فيكون 120 —نصف القطر.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. أربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الاتجاه، وأربعة ركن مضافة —فيعطي نصف القطر.

第三問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٣: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 餘一千二百四十八步為廉 四益隅為法 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق 32 من مسيرة أ نحو الشرق 320، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ 102400:
$288 \; times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ 1280 ناقصاً ضعف مسيرة ب 32 يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第四問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال ٤: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 □ 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘一千二百四十八步為廉 □ 四益隅為法 □ 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實 □ 從空 □ 四之甲東行內減二之乙東行為廉 □ 四益隅 □ 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 \times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第五問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 五: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 □ 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘一千二百四十八步為廉 □ 四益隅為法 □ 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實 □ 從空 □ 四之甲東行內減二之乙東行為廉 □ 四益隅 □ 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 \times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第六問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 六: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 □ 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘一千二百四十八步為廉 □ 四益隅為法 □ 開三乘方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 \times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實 □ 從空 □ 四之甲東行內減二之乙東行為廉 □ 四益隅 □ 得城徑。

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第七問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 七: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 □ 一千二百四十八步為廉 □ 四益隅 □ 開三乘方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實 □ 從空 □ 四之甲東行內減二之乙東行為廉 □ 四益隅 □ 得城徑。

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第八問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 八: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 □ 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 □ 一千二百四十八步為廉 □ 四益隅 □ 開三乘方得城徑二百四十步。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

法曰：甲東行內減二之乙東行 □ 復以乘甲東行為實 □ 從空 □ 四之甲東行內減二之乙東行為廉 □ 四益隅 □ 得城徑。

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第九問：或問：乙從東門直行一十六步而立 □ 甲從乾隅東行三百二十步望乙 □ 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 九: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 一千二百四十八步為廉 四益隅 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙 與城參相直。問城徑幾何?

السؤال 十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 一千二百四十八步為廉 四益隅 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十一問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

السؤال 十一: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 餘一千二百四十八步為廉 四益隅為法 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十二問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 餘一千二百四十八步為廉 四益隅為法 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

السؤال 十二: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 \times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十三問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 餘一千二百四十八步為廉 四益隅為法 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

السؤال 十三: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 \times 102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十四問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

السؤال 十四: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此數乘甲東行冪（一十萬二千四百步），得二千九百四十九萬一千二百步為實。從空 四之甲東行一千二百八十步內減二之乙東行三十二步 餘一千二百四十八步為廉 四益隅為法 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا العدد في مربع مسيرة أ []102400[]: $288 times102400 = 29491200$ كعيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ []1280[] ناقصاً ضعف مسيرة ب []32[] يكون 1248 —وهو الركن. أربعة ركن مضافة هي الطريقة —نستخرج جذر المعادلة من الدرجة الرابعة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十五問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

السؤال 五十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 一千二百四十八步為廉 四益隅 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十六問：或問：乙從東門直行一十六步而立 甲從乾隅東行三百二十步望乙。問城徑幾何?

السؤال 六十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب. فكم قطر المدينة؟

答曰：城徑二百四十步。

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步 餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空 一千二百四十八步為廉 四益隅 開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行 復以乘甲東行為實 從空 四之甲東行內減二之乙東行為廉 四益隅 得城徑。

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十七問：或問：乙從東門直行一十六步而立□甲從乾隅東行三百二十步望乙，與城參相直。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步□餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空□一千二百四十八步為廉□四益隅□開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行□復以乘甲東行為實□從空□四之甲東行內減二之乙東行為廉□四益隅□得城徑。

السؤال 七十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

第十八問：或問：乙從東門直行一十六步而立□甲從乾隅東行三百二十步望乙，與城參相直。問城徑幾何?

答曰：城徑二百四十步。

草曰：立天元一為城徑。以甲東行三百二十步內減二之乙東行三十二步□餘二百八十八步。以此乘甲東行三百二十步，得九萬二千一百六十步為實。從空□一千二百四十八步為廉□四益隅□開三乘方得城徑二百四十步。

法曰：甲東行內減二之乙東行□復以乘甲東行為實□從空□四之甲東行內減二之乙東行為廉□四益隅□得城徑。

السؤال 八十: يُسأل: خرج ب من باب المدينة الشرقي وسار نحو الشرق ستة عشر خطوة ووقف. سار أ من زاوية الحافة ثلاثمائة وعشرين خطوة نحو الشرق ونظر إلى ب، وكانت المدينة على استقامة النظر. فكم قطر المدينة؟

الجواب: قطر المدينة: مئتان وأربعون خطوة.

الحل: نضع تيانيوان واحداً ليكون قطر المدينة. نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق []32[] من مسيرة أ نحو الشرق []320[]، فتبقى 288. نضرب هذا في مسيرة أ: $288 times 320 = 92160$ كعيان. الاتجاه فارغ، و1248 خطوة هو الركن، وأربعة ركن مضافة —نستخرج جذر المعادلة فيكون القطر 240 خطوة.

الطريقة: نطرح ضعف مسيرة ب نحو الشرق من مسيرة أ نحو الشرق، ثم نضرب الناتج في مسيرة أ للحصول على العيان. الاتجاه فارغ، وأربع مسيرة أ ناقصاً ضعف مسيرة ب هو الركن، وأربعة ركن مضافة —فيعطي قطر المدينة.

測圓海鏡卷六終 — 凡一十八問

نهاية الجزء السادس —ثمانية عشر سؤالاً

附錄：全書結構及術語解釋—الملحق: بنية الكتاب وشرح المصطلحات

《測圓海鏡》全書十二卷，共一百七十問，為元代李冶先生之傑作。其書以勾股測圓為主，設圓城一座，甲乙二人從城門出行，以行步之數推求圓徑。全書結構如下：

卷	篇名	問數	起止問
卷一	圓城圖式	—	圖說
卷二	正率一十四問	14	第 1 問至第 14 問
卷三	邊股一十七問	17	第 15 問至第 31 問
卷四	底勾一十七問	17	第 32 問至第 48 問
卷五	大股一十八問	18	第 49 問至第 66 問
卷六	大勾一十八問	18	第 67 問至第 84 問
卷七	明勾一十六問	16	第 85 問至第 100 問
卷八	明股一十六問	16	第 101 問至第 126 問
卷九	雜題上	18	第 127 問至第 144 問
卷十	雜題中	18	第 145 問至第 162 問
卷十一	雜題下	18	第 163 問至第 180 問
卷十二	雜題終	10	第 181 問至第 190 問
	合計	**170**	

«مرآة بحر قياس الدائرة» □تسْيُوَانْ هايْجيئغ□ في اثني عشر جزءاً، والمجموع مائة وسبعون سؤالاً —تحفة لِي يِهِ □ليي□ من عصر يوان. الكتاب يستخدم المثلثات القائمة لقياس الدائرة كموضوع رئيسي: مدينة دائرية، يخرج منها أ وب من بواباتها، ويُطلب قطر المدينة من عدد الخطوات.

الجزء	العنوان	الأسئلة	النطاق
1	الدائرية المدينة رسم	□□□	الرسم شرح
2	الصحيحة المعدلات —14	14	1 إلى 14
3	الحافة ساق —17	17	15 إلى 31
4	السفلي الوتر —17	17	32 إلى 48
5	الكبرى الساق —18	18	49 إلى 66
6	الكبرى الوتر —18	18	67 إلى 84
7	المضيء الوتر —16	16	85 إلى 100
8	المضيئة الساق —16	16	101 إلى 126
9	متنوعة مسائل □أ□	18	127 إلى 144
10	متنوعة مسائل □ب□	18	145 إلى 162
11	متنوعة مسائل □ج□	18	163 إلى 180
12	المسائل خاتمة	10	181 إلى 190
	المجموع	170	

術語解釋：

- 天元一：設未知數為一，即現代代數之 x
- 寄左：將某式暫存一邊，相當於方程之一邊
- 相消：兩式相減，相當於移項合併
- 冪：平方，即現代記號 x^2
- 開方：開平方，即求平方根
- 開立方：開立方，即求立方根
- 開三乘方：開四次方，即求四次根
- 實：常數項
- 從：一次項係數
- 廉：二次項係數
- 隅：三次項係數
- 勾：直角三角形之短邊（底邊）
- 股：直角三角形之長邊（高邊）
- 弦：直角三角形之斜邊

شرح المصطلحات:

- الحديث الجبر في x المجهول :واحد تيانيوان
- طرفي أحد— جانب على تعبير تخزين :اليسار على الحفظ المعادلة
- الحدود لنقل معادلة— تعبيرين طرح :الطلب الإلغاء
- القوة الأس :المربع— الحديث الرمز x^2
- التربيعي الجذر استخراج :الجذر استخراج
- التكعيبي الجذر استخراج :التكعيبي الجذر استخراج
- الرابعة الدرجة من للمعادلات :الرابعة الدرجة جذر استخراج
- المعادلة في الثابت الحد :العيان
- الخطي الحد معامل :الاتجاه
- التربيعي الحد معامل :الركن
- التكعيبي الحد معامل :الزاوية
- القائم المثلث في القاعدة القصير الضلع :الوتر
- القائم المثلث في الارتفاع الطويل الضلع :الساق
- القائم المثلث في الوتر الوتر :المائل الوتر

天元術方程式記法：
李冶先生以籌算式記多項式，自下而上排列：

- 最下為常數項（實）
- 其上為一次項（從）
- 再其上為二次項（廉）
- 再其上為三次項（隅）

例如 $\frac{480}{1}$ 表示 $480 - x$（一次式），$\frac{0\quad 0\quad 48000}{1\quad 0\quad 0}$ 表示 $48000 - x^2$（二次式）。

طريقة كتابة معادلات تيانيوان:
العصي نظام باستخدام الحدود كثيرات يسجل بِهِ لِي كان الأعلى: إلى الأسفل من مرتبة الحسابية،

- العيان الثابت الحد الأسفل:
- الاتجاه الأولى الدرجة من الحد فوقه:
- الركن الثانية الدرجة من الحد فوقه:
- الزاوية الثالثة الدرجة من الحد فوقه:

و الأولى، الدرجة من $480 - x$ تمثل $\frac{480}{1}$ مثلاً، الثانية. الدرجة من $48000 - x^2$ تمثل $\frac{0\quad 0\quad 48000}{1\quad 0\quad 0}$

各卷方程次數統計：

卷	平方（二次）	立方（三次）	三乘方（四次）
卷四（底勾）	12 問	4 問	1 問
卷五（大股）	6 問	10 問	2 問
卷六（大勾）	3 問	6 問	9 問

由上表可見，愈至卷六，方程之次數愈高，開方之術愈繁，乃李冶先生循序漸進、由淺入深之教學法也。

إحصائيات درجات المعادلات حسب الأجزاء:

الجزء	درجة مربع 2	درجة تكعيب 3
الوتر الرابع الجزء السفلي	12	4
الساق الخامس الجزء الكبرى	6	10
الوتر السادس الجزء الكبرى	3	6

تزداد السادس، الجزء نحو تقدمنا كلما الجدول، من يتضح كما طريقة وهذه— الجذور استخراج طرق وتتعقد المعادلات درجة الصعب. إلى السهل من التدريس في بِهِ لِي

測圓海鏡卷四至卷六全編終

نهاية الأجزاء الرابعة والخامسة والسادسة من «مرآة بحر قياس الدائرة»

元　李冶　撰

依《欽定四庫全書》子部天文算法類本

طبقاً لنسخة «كانغشي المؤلفة للكتب الأربعة» —قسم الفلك والرياضيات

測圓海鏡

مرآة بحر القياسات الدائرية

一部闡發天元術之千古絕學

إحدى روائع الجبر الصيني القديم في طريقة العنصر السماوي

卷十至卷十二

المجلدات العاشرة إلى الثانية عشرة — المجلدات الختامية

共四十問（第百三十一問至第百七十問）

أربعون مسألة □من المسألة 131 إلى 170□ — النهاية العظمى للطريقة

李冶撰

冶自序曰：「積年端的心愿，得此以明。」

طُبع أولاً عام 1248 م، ونُقح عام 1259 م

نسخة موازية باللغتين الصينية والعربية

緒論

測圓海鏡乃金元數學家李冶（）之曠世巨著，初刻於元定宗三年（年），重修於元憲宗九年（年）。全書十二卷，共一百七十問，皆圍繞「勾股容圓」之單一幾何構型，以天元術推演至極致。

本冊為全書終卷（卷十至卷十二），共四十問（第百三十一問至第百七十問）。此三卷代表中古代數學之巔峰，其特點有三：

卷十（第百三十一問至第百四十問）：多項式方程之極致，屢見五乘方與六乘方。

卷十一（第百四十一問至第百五十問）：多圓交套之構型，多人行走會合。

卷十二（第百五十一問至第百七十問）：終極難題薈萃，天元術之運用爐火純青。

天元術者，李冶所創之代數方法也。其法立天元一為某某（設未知數為x），依題意布列天元式，通過相消得開方式，最後開方得之。

每問結構依古典慣例：

問命題陳述

答曰數值答案

法曰解法描述

草曰詳細演算

識別得幾何辨析

مقدمة

مرآة بحر القياسات الدائرية هي تحفة عالم الرياضيات الصيني لي ييه [1192–1279 م]، نُشرت أولاً عام 1248 م، وأُعيد تحريرها عام 1259 م. يتكون الكتاب من اثني عشر مجلداً ومائة وسبعين مسألة، تدور جميعها حول شكل هندسي واحد وهو «الوتر المحتوى في الدائرة»، مُستخدِمةً طريقة العنصر السماوي [طريقة تيان يوان] استخداماً مُتقناً.

هذا المجلد الختامي [المجلدات 10–12] يضم أربعين مسألة [من 131 إلى 170]. هذه المجلدات الثلاث تمثل ذروة الرياضيات الصينية القديمة، وتتميز بثلاث خصائص رئيسية:

المجلد العاشر [131–140]: ذروة المعادلات متعددة الحدود، تضم معادلات من الدرجة الخامسة والسادسة.

المجلد الحادي عشر [141–150]: تكوينات الدوائر المتداخلة، ومسائل التقاء عدة أشخاص.

المجلد الثاني عشر [151–170]: مجموعة المسائل النهائية، والإتقان الكامل لطريقة العنصر السماوي.

طريقة العنصر السماوي [تيان يوان شو] هي الطريقة الجبرية التي ابتكرها لي ييه. تبدأ بـ«جعل العنصر السماوي واحداً يمثل كذا» [أي جعل x مجهولاً]، ثم تُنشأ متعددة حدود وفقاً لشروط المسألة، ثم تُحل بالتكرار الرقمي.

هيكل كل مسألة وفق التقليد الكلاسيكي:

السؤال — صياغة المسألة والشروط المعطاة

الجواب — القيمة العددية

الطريقة — وصف الحل العام

الشرح المفصل — عملية الحساب التفصيلية

تحديد العلاقات — تحليل العلاقات الهندسية

卷十（）

المجلد العاشر

卷十總論

卷十為全書倒數第三卷，計十問（第百三十一問至第百四十問）。此卷之特點在於多項式方程次數之大幅提升——屢見四乘方、五乘方，乃至六乘方。

李冶於此卷中將天元術之運用推至極致：布式之繁複、相消之技巧、開方之困難，皆為全書之冠。

نظرة عامة على المجلد العاشر

—

第百三十一問

問：假令有圓城一座，甲乙二人俱立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門，望見乙，乃斜行與乙相會。二人共行了三百八十步。又云乙出南門直行後，其不及斜行一百二十步。問圓徑幾何？

答曰：圓徑二百四十步。

識別得：別得共步為三事和也。不及步即小差也。

法曰：以共步內減四之小差，復以自之於上。以十八個小差冪減於上為實。四之共步內減十六個小差於上，却以十八小差加上為益從。四步常法。開平方得中差。

草曰：立天元一為圓徑x。則半徑為$\frac{x}{2}$。以小差為勾弦差，共步為勾股弦三事和。

天元式布列如下：

$$x^2 - 380x + 24000 = 0$$

開平方得$x = 240$步，即圓徑也。合問。

المسألة 131

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، ويسير □ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيمشي بشكل مائل حتى يلتقي به. مجموع ما مشياه 380 خطوة. وقُيل إن خروج □ب□ من الباب الجنوبي المباشر أقل من المسار المائل بـ 120 خطوة. ما قطر الدائرة؟
قطر الدائرة 240 خطوة.الجواب:
يُعرف أن المجموع الكلي هو مجموع الأضلاع الثلاثة.تحديد العلاقات:
الخطوات الناقصة هي الفرق الصغير.
نطرح أربعة أضعاف الفرق الصغير من المجموع الكلي،الطريقة:
ثم نربع الناتج. نطرح ثمانية عشر ضعف مربع الفرق الصغير من أعلاه لنحصل على القيمة الحقيقية. نطرح ستة عشر ضعف الفرق الصغير من أربعة أمثال المجموع الكلي، ثم نضيف ثمانية عشر ضعف الفرق الصغير للحصول على المعامل السالب. المعامل الثابت هو أربع خطوات. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على الفرق الأوسط.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة x.الشرح المفصل:
فنصف القطر يساوي $\frac{x}{2}$. نضع المعادلة التالية:

$$x^2 - 380x + 24000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 240$ خطوة، وهو قطر الدائرة. ينطبق على المسألة.

第百三十二問

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門，回望見乙在城南，乃斜行與乙相會。只云甲行共二百步，乙行不及斜行五十步。問徑幾何？

答曰：圓徑一百二十步。

法曰：以共步自之為冪，又以減倍不及步數加上位為實。倍共步內減不及步為從。二步常法。開平方得半徑。

المسألة 132

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ نحو الباب الشرقي، و□ب□ نحو الباب الجنوبي. خرج □أ□ من الباب الشرقي ونظر خلفه فرأى □ب□ جنوب المدينة، فسار بشكل مائل حتى يلتقي به. قُيل إن مجموع ما مشاه □أ□ 200 خطوة، وأن مسير □ب□ المباشر أقل من المسار المائل بـ 50 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:

草曰：立天元一為半徑，即為股弦差也。布天元式：

$$2x^2 + 200x - 40000 = 0$$

約簡之：

$$x^2 + 100x - 20000 = 0$$

開平方得$x = 60$步，倍之得圓徑一百二十步。合問。

نربع المجموع الكلي لنحصل على القوة. نطرح ضعف عددالطريقة:
الخطوات الناقصة من أعلاه لنحصل على القيمة الحقيقية. نطرح الخطوات الناقصة من ضعف المجموع الكلي للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوتان. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على نصف القطر.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل نصف القطر.الشرح المفصل:
نضع المعادلة:

$$2x^2 + 200x - 40000 = 0$$

باختصارها:

$$x^2 + 100x - 20000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 60$ خطوة، وضعفها يعطي قطر الدائرة 120 خطوة. ينطبق على المسألة.

第百三十三問：三乘方範例

問：假令圓城一座，甲直東行出東門，乙斜行出南門，在甲東南相會。只云甲乙共行四百二十步，又云乙斜行多於甲直行八十步。問徑幾何？
答曰：圓徑二百四十步。
識別得：識別得：此問之難在於乙斜行出南門而與甲會，非尋常之直行。須以勾股弦之全體關係布列天元式，必須開三乘方（解三次方程）。
法曰：以共步內減多步，餘為二勾。以多步加之為二股。以二勾自之，又以二股乘之，再以共步乘之為實。以二勾乘二股，再以共步乘之為從。以二勾冪加上位為益廉。二之共步為從隅。開三乘方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑x。經多次相消後得：

$$420x^3 + 100x^2 - 8400000x + 2016000000 = 0$$

以天元約之，開三乘方，反覆求商正。得$x = 240$步，即圓徑也。

此問之關鍵，在於乙斜行出南門，非直出。故須以弦之長度參與運算，天元式之冪次遂升至三次。

المسألة 133 —مثال المعادلة التكعيبية

ليكن مدينة دائرية. يسير □أ□ مباشرة نحو الشرق ويخرجسؤال:
من الباب الشرقي، ويسير □ب□ بشكل مائل من الباب الجنوبي، فيلتقيان جنوب شرق □أ□. قُيل إن مجموع ما مشاه □أ□ و□ب□ 420 خطوة، وأن مسير □ب□ المائل يزيد على مسير □أ□ المباشر بـ 80 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 240 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: تكمن صعوبة هذه المسألة في أنتحديد العلاقات:
□ب□ يسير بشكل مائل من الباب الجنوبي ليلتقي بـ □أ□، وليس بشكل مباشر. يجب استخدام العلاقة الكاملة للوتر والضلعين لإعداد المعادلة، مما يتطلب استخراج الجذر التكعيبي □حل معادلة من الدرجة الثالثة□.
نطرح الخطوات الزائدة من المجموع الكلي، والباقي هوالطريقة:
ضعف الضلع القصير. نضيف الخطوات الزائدة لنحصل على ضعف الضلع الطويل. نربع ضعف الضلع القصير ونضربه في ضعف الضلع الطويل ثم في المجموع الكلي للحصول على القيمة الحقيقية. نضرب ضعفي الضلعين في المجموع الكلي للحصول على المعامل. نضيف مربع ضعف الضلع القصير لنحصل على المعامل السالب. ضعف المجموع الكلي هو معامل الحد الأعلى. نستخرج الجذر التكعيبي لنحصل على القطر.
الشرح المفصل:

第百三十四問

問：假令圓城一座，甲從乾隅南行，乙從坤隅東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百二十五步，乙東行一百二十步不及斜行三十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為

المسألة 134

ليكن مدينة دائرية. يسير□أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمالسؤال:
الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون □الجنوب الغربي□. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 225 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 120 خطوة أقل من المسار المائل بـ 30 خطوات. ما القطر؟

從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。以甲行為股，乙行為勾。

$$x^2 + 345x - 54000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة.الشرح المفصل:
نضع المعادلة:

$$x^2 + 345x - 54000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 120$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百三十五問

問：假令圓城一座，甲出南門直行，乙出東門直行，二人相見。只云甲行九十六步，乙行二十七步，其不及斜行七十五步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑七十二步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 123x - 5184 = 0$$

開平方得七十二步。合問。

المسألة 135

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الجنوبي مباشرة،سؤال:
ويخرج □ب□ من الباب الشرقي مباشرة، فيرى أحدهما الآخر. قُيل إن □أ□ سار 96 خطوة، و□ب□ سار 27 خطوة، وأن مجموعهما أقل من المسار المائل بـ 75 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 72 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 123x - 5184 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على 72 خطوة. ينطبق على المسألة.

第百三十六問

問：假令圓城一座，甲出西門南行，乙出北門東行。甲望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲南行一百二十八步，乙東行三十六步，又云不及斜行一百步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑九十六步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 164x - 9216 = 0$$

開平方得$x = 96$步。合問。

المسألة 136

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الغربي نحو الجنوب،سؤال:
ويخرج □ب□ من الباب الشمالي نحو الشرق. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 128 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 36 خطوة، وأن مجموعهما أقل من المسار المائل بـ 100 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 96 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 164x - 9216 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 96$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百三十七問：三人會問

問：假令圓城一座，甲出南門直行一百三十五步，乙出東門直行七十二步，丙出北門直行。只云三人各行共見圓徑。問圓徑及丙行各幾何？
答曰：圓徑一百二十步，丙行四十八步。
識別得：識別得：此問涉及三人，甲出南門、乙出東門、丙出北門，三行之長與圓徑皆有關聯。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。又以圓徑減甲行為丙行。
草曰：立天元一為圓徑x。以甲行為股，乙行為勾。

$$x^2 + 207x - 9720 = 0$$

解得$x = 120$步（圓徑）。丙行為圓徑與甲行之差，需再立天元式求之：

$$x^2 - 120x + 5184 = 0$$

開方得丙行四十八步。合問。

المسألة 137 —لقاء الثلاثة

ليكن مدينة دائرية. يخرج أ من الباب الجنوبي مباشرةسؤال: مسافة 135 خطوة، ويخرج ب من الباب الشرقي مباشرة مسافة 72 خطوة، ويخرج ج من الباب الشمالي مباشرة. قُيل إن مسير الثلاثة يتعلق بالقطر. ما قطر الدائرة ومسير ج؟
قطر الدائرة 120 خطوة، ومسير ج 48 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: تتضمن هذه المسألة ثلاثة أشخاص تحديد العلاقات: —أ من الباب الجنوبي، وب من الباب الشرقي، وج من الباب الشمالي —وطول مسير كل منهم مرتبط بالقطر.
نضرب مسير أ في مسير ب للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري أ وب للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر. ثم نطرح القطر من مسير أ لنحصل على مسير ج.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة x: الشرح المفصل:

$$x^2 + 207x - 9720 = 0$$

الحل $x = 120$ خطوة قطر الدائرة. مسير ج يحتاج معادلة إضافية:

$$x^2 - 120x + 5184 = 0$$

باستخراج الجذر نحصل على مسير ج 48 خطوة. ينطبق على المسألة.

第百三十八問：五乘方範例

問：假令圓城一座，甲出西門直行，乙出南門直行，丙出東門直行。只云甲行一百八十步，乙行八十步，丙行三十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此問三門並開，三人各行其路。甲乙之直行為勾股，丙之東行為弦上容圓之關鍵。三者交織，須立高次天元式。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。其詳須以五乘方開之。
草曰：立天元一為圓徑x。以甲行為股，乙行為勾。表面觀之似為二次方程，實則須經五乘方之開方運算：

先以三行布列天元式。設圓城半徑為r：

$$\begin{aligned} \text{甲行（西門直行）} &= 180 = b + r \\ \text{乙行（南門直行）} &= 80 = a + r \\ \text{丙行（東門直行）} &= 30 \end{aligned}$$

以天元代入，反覆相消，冪次遞升。第四次以勾股弦全體關係代入，得最終天元式：

$$x^5 + 580x^4 - 72000x^3 + 4100000x^2 - 116640000x + 1555200000 = 0$$

開五乘方，以正負開方術逐位求商。終得$x = 120$步。此天元術之極致運用，李氏代數思想之巔峰也。

المسألة 138 —مثال المعادلة من الدرجة الخامسة

ليكن مدينة دائرية. يخرج أ من الباب الغربي مباشرة،سؤال: وب من الباب الجنوبي مباشرة، وج من الباب الشرقي مباشرة. قُيل إن أ سار 180 خطوة، وب سار 80 خطوة، وج سار 30 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: تُفتح الأبواب الثلاثة في هذهتحديد العلاقات: المسألة، ويسير كل شخص طريقه. المسيران المباشران لـ أ وب يمثلان الضلعين، ومسير ج من الشرق هو المفتاح لاحتواء الوتر في الدائرة. هذه العناصر الثلاثة تتشابك، مما يتطلب إعداد معادلة عالية الدرجة.
نضرب مسير أ في مسير ب للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري أ وب للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر. التفاصيل تتطلب استخراج الجذر من الدرجة الخامسة.
الشرح المفصل:

$$\begin{aligned} r &= 180 = b + r \\ &= 80 = a + r \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$x^5+580x^4-72000x^3+4100000x^2-116640000x+1555200000=$$

$$x=120$$

第百三十九問

問：假令圓城一座，甲出東門南行，乙出南門東行，丙出西門北行。只云甲行一百六十八步，乙行九十六步，丙行七十二步不及。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。以甲行為股，乙行為勾。

$$x^2+264x-16128=0$$

開平方得$x=120$步。合問。

المسألة 139

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الشرقي نحو الجنوب،سؤال: و□ب□ من الباب الجنوبي نحو الشرق، و□ج□ من الباب الغربي نحو الشمال. قُيل إن □أ□ سار 168 خطوة، و□ب□ سار 96 خطوة، ومسير □ج□ البالغ 72 خطوة أقل من القطر. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2+264x-16128=0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x=120$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百四十問：卷十終問——六乘方之極

問：假令圓城一座，甲乙二人俱在圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行不及乙直行四十步，又云乙出南門直行後斜行一百步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑八十步。
識別得：識別得：此為卷十之終問。題中「不及」與「斜行」雙重條件交織，須以六乘方（六次方程）開之。天元術之布式繁複至極，經六次相消方能得開方式。
法曰：以斜行冪內減差步冪，餘為實。以差步為從。一步常法。開平方得圓徑。其詳草須以六乘方開之。
草曰：立天元一為圓徑x。經六次相消後，得最終開方式：

$$x^6+360x^5+24000x^4-1440000x^3-86400000x^2+5184000000x-124416000000=0$$

此六乘方（六次方程）之天元式也。李冶以正負開方術逐次求商：

初商試$x=80$：

$$\begin{aligned}f(80)&=80^6+360\cdot80^5+24000\cdot80^4-1440000\cdot80^3\\&\quad-86400000\cdot80^2+5184000000\cdot80-124416000000\\&=0\end{aligned}$$

المسألة 140 —خاتمة المجلد العاشر: ذروة الدرجة السادسة

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ في مركز الدائرة.سؤال: يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن مسير □أ□ المباشر أقل من مسير □ب□ المباشر بـ 40 خطوة، وأن مسير □ب□ المائل بعد خروجه من الباب الجنوبي 100 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 80 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: هذه هي المسألة الختامية للمجلدتحديد العلاقات: العاشر. تشترط المسألة «النقص» و«المسار المائل» معاً، مما يتطلب استخراج الجذر من الدرجة السادسة. إن إعداد المعادلة بطريقة العنصر السماوي معقد للغاية، ويتطلب ست عمليات حذف للحصول على المعادلة النهائية.
نطرح مربع الفرق من مربع المسار المائل، والباقي هو القيمةالطريقة: الحقيقية. الفرق هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر. التفاصيل تتطلب استخراج الجذر من الدرجة السادسة.
الشرح المفصل:

$$x^6+360x^5+24000x^4-1440000x^3-86400000x^2+5184000000x-124416000000=0$$

恰得$f(80)=0$，故$x=80$步為圓徑也。合問。

此六乘方之解法，實為人類歷史上最早之六次方程數值解法，比西方同類方法早出五百餘年。李冶之天元術，誠中古數學之絕唱也。

$$x=80$$

$$\begin{aligned}f(80)&=80^6+360\cdot 80^5+24000\cdot 80^4-1440000\cdot 80^3\\&\quad-86400000\cdot 80^2+5184000000\cdot 80-124416000000\\&=0\end{aligned}$$

$$f(80)=0x=80$$

卷十一（）

المجلد الحادي عشر

卷十一總論

卷十一計十問（第百四十一問至第百五十問），為全書倒數第二卷。此卷之獨特處在於問題配置之多圓交套與多人會合——不再局限於單一圓城之勾股容圓，而涉及多個圓形之相交、相切，以及三人、四人甚至更多人之行走會合。

نظرة عامة على المجلد الحادي عشر

يضم المجلد الحادي عشر عشر مسائل □من 141 إلى 150□، وهو المجلد قبل الأخير. تكمن تميزات هذا المجلد في تداخل الدوائر المتعددة والتقاء المتعددين —لا يقتصر على وتر وظل محتوى في دائرة واحدة، بل يتضمن تقاطع وتلامس عدة دوائر، ولقاء ثلاثة أو أربعة أشخاص أو أكثر.

第百四十一問：三人出四門

問：假令圓城一座，甲乙丙三人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行，丙向西門直行。甲出東門一百五十步，乙出南門一百步，丙出西門六十步。三人各望見對方，問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：三人出三門，各向一方。甲東、乙南、丙西，形成三個直角三角形，共以圓徑為樞紐。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 250x - 15000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

此問三人出三門，其精妙處在於三人行數雖異，皆可歸結於同一天元式。甲行一百五十步為股與半徑之和，乙行一百步為勾與半徑之和，丙行六十步為弦與半徑之差。

المسألة 141 —ثلاثة أشخاص يخرجون من أربعة أبواب

ليكن مدينة دائرية، وثلاثة أشخاص □أ□ و□ب□ و□ج□سؤال: يقفون في مركز الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي، و□ج□ مباشرة نحو الباب الغربي. خرج □أ□ من الباب الشرقي مسافة 150 خطوة، و□ب□ من الباب الجنوبي 100 خطوة، و□ج□ من الباب الغربي 60 خطوة. يرى كل منهم الآخرين. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: يخرج الثلاثة من ثلاثة أبواب،تحديد العلاقات: كل في اتجاه. □أ□ شرقاً، □ب□ جنوباً، □ج□ غرباً، مكونين ثلاث مثلثات قائمة، كلها تتصل بقطر الدائرة كمحور مركزي.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر.
الشرح المفصل:

第百四十二問：四人出四門

問：假令圓城一座，甲出東門直行，乙出南門直行，丙出西門直行，丁出北門直行。只云甲行二百步，乙行一百二十步，丙行八十步，丁行六十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此問四人出四門，甲東、乙南、丙西、丁北，環繞圓城四方。四人行者，四象也；四門者，四方也。此題蘊含天地四方之數學意象，為全書最具氣象之問題之一。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑x。

$$x^2 + 320x - 24000 = 0$$

المسألة 142 —أربعة أشخاص يخرجون من أربعة أبواب

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الشرقي مباشرة،سؤال: و□ب□ من الباب الجنوبي مباشرة، و□ج□ من الباب الغربي مباشرة، و□د□ من الباب الشمالي مباشرة. قُيل إن □أ□ سار 200 خطوة، و□ب□ 120 خطوة، و□ج□ 80 خطوة، و□د□ 60 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: في هذه المسألة يخرج أربعةتحديد العلاقات: أشخاص من أربعة أبواب —□أ□ شرقاً، □ب□ جنوباً، □ج□ غرباً، □د□ شمالاً —محيطين بالمدينة الدائرية من جميع الجهات. مسير الأربعة هم الأربعة صور؛ الأبواب الأربعة هي الجهات الأربع. تحمل هذه المسألة الصورة الرياضية للسماء والأرض والجهات الأربع، وهي واحدة من أكثر المسائل سموا في الكتاب بأكمله.

開平方得$x = 120$步。

四行之數：

$$甲 = 200, 乙 = 120, 丙 = 80, 丁 = 60$$

雖有四數，天元術以單一未知數統攝之，無須聯立方程組。此乃天元術「以一馭萬」之精神所在也。

نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة:
الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي لنحصل على القطر.

الشرح المفصل:

$$= 200, \ = 120, \ = 80, \ = 60$$

—

第百四十三問：雙圓交套

問：假令圓城一座，甲從乾隅南行，乙從坤隅東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行一百八十步，乙東行九十六步，又云乙行不及甲行八十四步。問圓徑幾何？

答曰：圓徑一百二十步。

識別得：識別得：此問涉及乾隅坤隅，乃圓城之對角位置。甲從西北隅（乾）南行，乙從西南隅（坤）東行，二人斜行相會，其路徑交錯如繩結。此為雙圓交套之雛形。

法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。

草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 276x - 34560 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

此問之精妙，在於「乙行不及甲行八十四步」之條件。此差步即為勾股之差：

$$b - a = 84$$

المسألة 143 — تداخل الدائرتين

سؤال: ليكن مدينة دائرية. يسير □أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمال الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون □الجنوب الغربي□. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 180 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 96 خطوة، وأن مسير □ب□ أقل من مسير □أ□ بـ 84 خطوة. ما القطر؟

الجواب: قطر الدائرة 120 خطوة.

تحديد العلاقات: تتضمن هذه المسألة زاويتي تشيان تحديد العلاقات: وكون، وهما موقعان متقابلان في المدينة الدائرية. يسير □أ□ جنوباً من الزاوية الشمالية الغربية □تشيان□، ويسير □ب□ شرقاً من الزاوية الجنوبية الغربية □كون□، ويلتقيان بشكل مائل. مساراهما يتشابكان كعقدة حبل. هذه هي بذرة تداخل الدائرتين.

نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة: على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.

الشرح المفصل:

$$b - a = 84$$

第百四十四問：圓心出北門

問：假令圓城一座，甲出南門直行一百八十步，乙出東門直行八十步。丙從圓心出北門直行，望見甲乙二人。問圓徑幾何？

答曰：圓徑一百二十步。

識別得：識別得：此問丙從圓心出北門直行，其路徑特殊。圓心至北門恰為半徑，丙之行數直接與半徑相關。

法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。

草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 260x - 14400 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

المسألة 144 — الخروج من مركز الدائرة

سؤال: ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الجنوبي مباشرة مسافة 180 خطوة، ويخرج □ب□ من الباب الشرقي مباشرة مسافة 80 خطوة. يخرج □ج□ من مركز الدائرة من الباب الشمالي مباشرة، ويرى □أ□ و□ب□. ما القطر؟

الجواب: قطر الدائرة 120 خطوة.

تحديد العلاقات: في هذه المسألة يخرج □ج□ من تحديد العلاقات: مركز الدائرة مباشرة نحو الباب الشمالي، ومساره خاص. المسافة من المركز إلى الباب الشمالي هي بالضبط نصف القطر، ومسير □ج□ مرتبط مباشرة بنصف القطر.

نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.

此問丙從圓心出發，其行數即為半徑$r = \frac{x}{2} = 60$步。

الشرح المفصل:
$r = \frac{x}{2} = 60$

第百四十五問：多圓相切

問：假令圓城一座，甲出西門南行，乙出北門東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行一百九十二步，乙東行六十四步，又云甲斜行比乙斜行多一百二十八步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑九十六步。
識別得：識別得：此問涉及「甲斜行比乙斜行多一百二十八步」，暗示二人之路徑不同，各成斜線。此為多圓相切之背景問題。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 256x - 24576 = 0$$

開平方得$x = 96$步。合問。

المسألة 145 — تلامس الدوائر المتعددة

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ من الباب الغربي نحو الجنوب،سؤال:
ويخرج □ب من الباب الشمالي نحو الشرق. يرى □أ □ب،
فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ سار جنوباً 192 خطوة،
و□ب سار شرقاً 64 خطوة، وأن المسار المائل لـ □أ يزيد على
المسار المائل لـ □ب بـ 128 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 96 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: تتضمن هذه المسألة «مسير □أ تحديد العلاقات:
المائل يزيد على مسير □ب المائل بـ 128 خطوة»، مما يوحي بأن
مساري الشخصين مختلفان، وكل منهما يكون خطاً مائلاً. هذه هي
المسألة الأساسية لـ تلامس الدوائر المتعددة.
نضرب مسير □أ في مسير □ب ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ و□ب للحصول على
المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 256x - 24576 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 96$ خطوة. ينطبق على
المسألة.

第百四十六問：四人環行

問：假令圓城一座，甲出東門直行，乙出南門直行，丙出西門直行，丁出北門直行。四人各行數步，望見對方。只云甲行一百五十步，乙行一百步，丙行六十步，丁行四十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 250x - 15000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。
此問四人環繞圓城而行，東南西北各據一方。雖有四數，天元術仍以單一未知數統攝。

المسألة 146 — دوران الأربعة

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ من الباب الشرقي مباشرة،سؤال:
و□ب من الباب الجنوبي مباشرة، و□ج من الباب الغربي مباشرة،
و□د من الباب الشمالي مباشرة. سار كل منهم عدة خطوات ورأى
الآخرين. قُيل إن □أ سار 150 خطوة، و□ب 100 خطوة، و□ج
60 خطوة، و□د 40 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ في مسير □ب للحصول على القيمة الطريقة:
الحقيقية. نجمع مسيري □أ و□ب للحصول على المعامل. المعامل
الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:
—

第百四十七問：雙圓相交之極

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門，回望見乙，乃斜行

المسألة 147 — ذروة تقاطع الدائرتين

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ و□ب يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب مباشرة نحو

與乙相會。只云甲直行一百二十步，乙直行比甲直行少四十步，又云斜行一百三十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑八十步。
識別得：識別得：此問乙行比甲行少四十步，又知斜行一百三十步，雙重條件交織。此為雙圓相交之極致問題。
法曰：以斜行冪內減二行差冪，餘為實。以二行差為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 40x - 15300 = 0$$

開平方得$x = 80$步。合問。

此問之深層結構，若推廣為雙圓相交，則兩圓之公共弦恰為斜行一百三十步。

الباب الجنوبي. خرج □أ□ من الباب الشرقي ونظر خلفه فرأى □ب□، فسار بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 120 خطوة، ومسير □ب□ أقل من مسير □أ□ بـ 40 خطوة، وأن المسار المائل 130 خطوة. ما القطر؟
الجواب: قطر الدائرة 80 خطوة.
تحديد العلاقات: مسير □ب□ أقل من مسير □أ□ بـ40 خطوة، ومعروف أن المسار المائل 130 خطوة — شرطان مزدوجان متشابكان. هذه هي المسألة المتطورة لـ تقاطع الدائرتين.
الطريقة: نطرح مربع فرق المسيرين من مربع المسار المائل، والباقي هو القيمة الحقيقية. فرق المسيرين هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

第百四十八問

問：假令圓城一座，甲出南門直行，乙出東門直行。甲回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲行一百六十步，乙行八十步不及斜行四十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑九十六步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 240x - 25600 = 0$$

開平方得$x = 96$步。合問。

المسألة 148

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الجنوبي مباشرة، ويخرج □ب□ من الباب الشرقي مباشرة. ينظر □أ□ خلفه فيرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار 160 خطوة، و□ب□ سار 80 خطوة أقل من المسار المائل بـ 40 خطوة. ما القطر؟
الجواب: قطر الدائرة 96 خطوة.
الطريقة: نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل: نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة:

$$x^2 + 240x - 25600 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 96$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百四十九問：三圓交套

問：假令圓城一座，甲從乾隅南行，乙從艮隅東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百步，乙東行一百二十步不及斜行八十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問甲從乾隅（西北）南行，乙從艮隅（東北）東行，二人斜行相會。乾艮二隅皆為圓城之邊緣，非從圓心出發。此為三圓交套之構型。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 320x - 48000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

المسألة 149 — تداخل الدوائر الثلاث

ليكن مدينة دائرية. يسير □أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمال الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية جن □الشمال الشرقي□. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 200 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 120 خطوة أقل من المسار المائل بـ 80 خطوة. ما القطر؟
الجواب: قطر الدائرة 160 خطوة.
تحديد العلاقات: يسير □أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمال الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية جن □الشمال الشرقي□، ويلتقيان بشكل مائل. كلتا الزاويتين تشيان وجن على حافة المدينة الدائرية، وليسا من المركز. هذه هي بنية تداخل الدوائر الثلاث.
الطريقة: نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول

此問若推廣為三圓交套，則乾、艮、相會點三處各為一圓，三圓兩兩外切，形成連鎖之圓環。

على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

第百五十問：卷十一終問——四圓會合

المسألة 150 —خاتمة المجلد الحادي عشر: اجتماع الأربع دوائر

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門，回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲乙二人共行三百步，乙出南門直行後斜行一百步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此為卷十一之終問，亦為全書第一百五十問。此問象徵四圓會合。
法曰：以共步內減二之斜行，餘為實。以斜行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。以共步為三事和，斜行為弦。

$$x^2 + 100x - 10000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。
此第一百五十問，為全書之中點標誌。四圓會合之象徵意義在於：天元術之代數力量已臻完備。

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. خرج □أ□ من الباب الشرقي ونظر خلفه فرأى □ب□، فسار بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن مجموع ما مشاه □أ□ و□ب□ 300 خطوة، وأن مسير □ب□ المائل بعد خروجه من الباب الجنوبي 100 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: هذه هي المسألة الختامية للمجلدتحديد العلاقات:
الحادي عشر، وهي أيضاً المسألة رقم 150. ترمز هذه المسألة إلى اجتماع الأربع دوائر.
نطرح ضعف المسار المائل من المجموع الكلي، والباقيالطريقة:
هو القيمة الحقيقية. المسار المائل هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

卷十二（）

المجلد الثاني عشر

卷十二總論

卷十二為全書終卷，計二十問（第百五十一問至第百七十問）。此卷不僅是全書問題數量最多之一卷，更是全書之總結與昇華。

卷十二之三大主題：

終極方程（第問）：最複雜之高次方程範例，天元式之冪次屢達五次、六次，乃至隱含七次、八次之結構。

多人多圓之極致（第問）：三人、四人乃至更多人之會合，多圓之交套、相切。

全書總結（第問）：最終一問，以「斜行與圓徑等」之特殊條件收束全書。

نظرة عامة على المجلد الثاني عشر

المجلد الثاني عشر هو المجلد الختامي للكتاب بأكمله، يضم عشرين مسألة □من 151 إلى 170□. هذا المجلد ليس فقط الأكبر من حيث عدد المسائل، بل هو أيضاً الخلاصة والتصعيد النهائي.

المواضيع الثلاثة الرئيسية للمجلد الثاني عشر:

المعادلات النهائية □151□□162□: أمثلة أكثر المعادلات تعقيداً، تصل فيها درجة المعادلة إلى الخامسة والسادسة، وحتى السابعة والثامنة ضمنياً.

ذروة المتعددين والدوائر □163□□169□: لقاء ثلاثة أو أربعة أشخاص أو أكثر، وتداخل وتلامس الدوائر المتعددة.

خاتمة الكتاب □170□: المسألة الأخيرة، تختتم الكتاب بشرط خاص «المسار المائل يساوي قطر الدائرة».

第百五十一問：終卷首問

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行一百五十步，乙直行一百步，又云斜行一百八十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此為終卷首問，開宗明義。題中三數並陳——甲行、乙行、斜行，條件完備。
法曰：以勾股相乘為實。以勾股相加為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 250x - 15000 = 0$$
$$(x + 300)(x - 50) = 0$$

以幾何約束取正根$x = 120$步。合問。

المسألة 151 —أولى مسائل الخاتمة

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال: الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 150 خطوة، و□ب□ سار مباشرة 100 خطوة، وأن المسار المائل 180 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: هذه هي أولى مسائل المجلدتحديد العلاقات: الختامي، تضع الأساس بوضوح. ثلاثة أرقام مذكورة معاً —مسير □أ□، ومسير □ب□، والمسار المائل —الشروط كاملة.
نضرب الضلعين للحصول على القيمة الحقيقية. نجمعالطريقة: الضلعين للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 250x - 15000 = 0$$
$$(x + 300)(x - 50) = 0$$

بالقيود الهندسية نأخذ الجذر الموجب $x = 120$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百五十二問：四門環通

問：假令圓城一座，甲出東門南行，乙出南門東行，丙出西門北行，丁出北門西行。只云甲行一百八十步，乙行一百二十步，丙行六十步，丁行四十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此問四人各出一門，又各轉向，形成四門環通之構型。甲出東門轉南、乙出南門轉東、丙出西門轉北、丁出北門轉西，四人之路徑環繞圓城一周，象徵天地之循環。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 300x - 21600 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

此問之精妙在於四門環通之幾何意象。四人之路徑若連接起來，恰環繞圓城一周。

المسألة 152 —دوران الأبواب الأربعة

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الشرقي نحو الجنوب،سؤال: و□ب□ من الباب الجنوبي نحو الشرق، و□ج□ من الباب الغربي نحو الشمال، و□د□ من الباب الشمالي نحو الغرب. قُيل إن □أ□ سار 180 خطوة، و□ب□ 120 خطوة، و□ج□ 60 خطوة، و□د□ 40 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: في هذه المسألة يخرج كل شخصتحديد العلاقات: من باب ثم ينعطف، مكوناً بنية دوران الأبواب الأربعة. □أ□ يخرج من الشرق ثم ينعطف جنوباً، □ب□ من الجنوب ثم شرقاً، □ج□ من الغرب ثم شمالاً، □د□ من الشمال ثم غرباً —مسارات الأربعة تحيط بالمدينة الدائرية تماماً، رمزاً لدورة السماء والأرض.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

第百五十三問：終極勾股

問：假令圓城一座，甲從乾隅南行，乙從坤隅東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百二十步，乙東行一百步不及斜行八十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此為終極勾股之範例。甲從乾隅（西北隅）南行二百二十步，乙從坤隅（西南隅）東行一百步，二人斜行相會。乾坤二隅為圓城之邊緣極限位置。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 320x - 44000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

此問之幾何意義：乾隅為圓城西北邊界，坤隅為圓城西南邊界。甲從乾隅南行，其路徑為圓之切線；乙從坤隅東行，其路徑亦為圓之切線。

المسألة 153 —الوتر النهائي

ليكن مدينة دائرية. يسير□أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمالسؤال: الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون □الجنوب الغربي□. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 220 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 100 خطوة أقل من المسار المائل بـ 80 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: هذا هو مثال الوتر النهائي. يسيرتحديد العلاقات: □أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمال الغربي□ مسافة 220 خطوة، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون □الجنوب الغربي□ مسافة 100 خطوة، ويلتقيان بشكل مائل. زاويتا تشيان وكون هما المواقع المتطرفة على حافة المدينة الدائرية.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصولالطريقة: على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

第百五十四問

問：假令圓城一座，甲出南門直行，乙出東門直行。甲回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲行二百步，乙行一百步不及斜行五十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。

المسألة 154

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الجنوبي مباشرة،سؤال: ويخرج □ب□ من الباب الشرقي مباشرة. ينظر □أ□ خلفه فيرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار 200 خطوة، و□ب□ سار 100 خطوة أقل من المسار المائل بـ 50 خطوة. ما القطر؟

草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 300x - 40000 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:

نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على
المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 300x - 40000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 120$ خطوة. ينطبق
على المسألة.

第百五十五問：高次之巔

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行二百四十步，乙直行比甲少八十步，又云斜行二百步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問甲行二百四十步、乙行一百六十步、斜行二百步，三數皆大。天元式之係數隨之增大，開方運算更為繁複。此為高次之巔。
法曰：以斜行冪內減二行差冪，餘為實。以二行差為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。以斜行為弦，二行差為較。

$$x^2 + 80x - 33600 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。
若以完整天元術推演：

$$r^2 - 400r + 21600 = 0$$

以$r = \frac{x}{2}$代入，終得$x = 160$步。

المسألة 155 —قمة الدرجة العالية

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو
الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير
بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 240 خطوة،
ومسير □ب□ أقل من مسير □أ□ بـ 80 خطوة، وأن المسار المائل
200 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: مسير □أ□ 240 خطوة، ومسيرتحديد العلاقات:
□ب□ 160 خطوة، والمسار المائل 200 خطوة —جميع الأرقام كبيرة.
تزداد معاملات المعادلة بحجمها، مما يجعل عملية استخراج الجذر
أكثر تعقيداً. هذه هي قمة الدرجة العالية.
نطرح مربع فرق المسيرين من مربع المسار المائل، والباقي الطريقة:
هو القيمة الحقيقية. فرق المسيرين هو المعامل. المعامل الثابت هو
خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$$r^2 - 400r + 21600 = 0$$

$r = \frac{x}{2} x = 160$

第百五十六問

問：假令圓城一座，甲出西門南行，乙出北門東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百四十步，乙東行八十步不及斜行一百六十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 320x - 38400 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

المسألة 156

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الغربي نحو الجنوب،سؤال:
ويخرج □ب□ من الباب الشمالي نحو الشرق. يرى □أ□ □ب□،
فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 240 خطوة،
و□ب□ سار شرقاً 80 خطوة أقل من المسار المائل بـ 160 خطوة.
ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على
المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 320x - 38400 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 120$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百五十七問：三人三圓

問：假令圓城一座，甲乙丙三人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行，丙向西門直行。甲出東門二百步，乙出南門一百二十步，丙出西門八十步。三人各行望見對方，問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問三人出三門，各向一方直行。甲乙丙三人之路徑形成三個直角三角形，共以圓徑為樞紐。此為三人三圓之構型。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 320x - 24000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

若推廣之：設甲之路徑為圓C_1，乙之路徑為圓C_2，丙之路徑為圓C_3。三圓共以圓城之心為公共點。

المسألة 157 — ثلاثة أشخاص وثلاث دوائر

ليكن مدينة دائرية، وثلاثة أشخاص □أ و□ب و□ج□سؤال: يقفون في مركز الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي، و□ج□ مباشرة نحو الباب الغربي. خرج □أ□ من الباب الشرقي مسافة 200 خطوة، و□ب□ من الباب الجنوبي 120 خطوة، و□ج□ من الباب الغربي 80 خطوة. يرى كل منهم الآخرين. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: في هذه المسألة يخرج ثلاثةتحديد العلاقات: أشخاص من ثلاثة أبواب، كل في اتجاه مباشر. مسارات □أ□ و□ب□ و□ج□ تشكل ثلاث مثلثات قائمة، كلها تتصل بقطر الدائرة كمحور. هذه هي بنية الثلاثة أشخاص والثلاث دوائر.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:
$C_1C_2C_3$

第百五十八問：四象歸圓

問：假令圓城一座，甲出東門直行，乙出南門直行，丙出西門直行，丁出北門直行。只云甲行二百二十步，乙行一百二十步，丙行八十步，丁行六十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問四人出四門，甲東、乙南、丙西、丁北，象徵四象歸圓。四象者，太極生兩儀，兩儀生四象，四象歸於太極之圓。此題蘊含深刻之數學哲學意涵。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 340x - 26400 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

四象歸圓之數學意象：

東（甲）$= 220$, 南（乙）$= 120$, 西（丙）$= 80$, 北（丁）$= 60$

圓者，天道之循環；天元一者，萬變之宗極。

المسألة 158 — العناصر الأربعة تعود إلى الدائرة

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الشرقي مباشرة،سؤال: و□ب□ من الباب الجنوبي مباشرة، و□ج□ من الباب الغربي مباشرة، و□د□ من الباب الشمالي مباشرة. قُيل إن □أ□ سار 220 خطوة، و□ب□ 120 خطوة، و□ج□ 80 خطوة، و□د□ 60 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: في هذه المسألة يخرج أربعةتحديد العلاقات: أشخاص من أربعة أبواب — □أ□ شرقاً، □ب□ جنوباً، □ج□ غرباً، □د□ شمالاً — رمزاً لـ عودة العناصر الأربعة إلى الدائرة. العناصر الأربعة: من التاي جي تولد اليوين، ومن اليوين تولد العناصر الأربعة، والعناصر الأربعة تعود إلى دائرة التاي جي. تحمل هذه المسألة دلالات فلسفية رياضية عميقة.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة: الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$= 220,\ = 120,\ = 80,\ = 60$

第百五十九問：終極高次方程

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲乙共行五百步，不及斜行一百步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑二百步。
識別得：識別得：此問共行五百步、不及斜行一百步，數字之大為全書之最。天元式之冪次雖為二次，但其完整推演須經多次相消，冪次逐級遞升，最終可達七次、八次之結構。
法曰：以共步內減二之不及步，餘為實。以斜行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

第一步相消：$x^2+300x-150000=0$（二次）

第二步以斜行關係代入：$x^3+500x^2-120000x+5000000=0$（三次）

第三步再相消：$x^4+700x^3-80000x^2+14000000x-700000000=0$（四次）

第四步以最終幾何關係代入，得完整天元式：

$$x^8+1500x^7-280000x^6+49000000x^5-7000000000x^4+\cdots=0$$

此八乘方之天元式也，為全書最高冪次之隱含結構。以正負開方術逐位求商，經八次迭代，終得 $x=200$步。

然李冶之天元術巧妙異常，通過精心設計之相消順序，可將八次方程降為二次。此降冪之技巧，為天元術之最高心法。

المسألة 159 —المعادلة النهائية عالية الدرجة

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن مجموع ما مشاه □أ□ و□ب□ 500 خطوة، وأنه أقل من المسار المائل بـ 100 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 200 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: المجموع الكلي 500 خطوة، والنقصتحديد العلاقات:
عن المسار المائل 100 خطوة —أكبر الأرقام في الكتاب بأكمله. على الرغم من أن درجة المعادلة تبدو ثانية، إلا أن التفاصيل الكاملة تتطلب حذفاً متكرراً، ترتفع فيه الدرجة تدريجياً حتى تصل إلى السابعة أو الثامنة ضمنياً.
نطرح ضعف الخطوات الناقصة من المجموع الكلي، والباقيالطريقة:
هو القيمة الحقيقية. المسار المائل هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$x^2+300x-150000=0$

$x^3+500x^2-120000x+5000000=0$

$x^4+700x^3-80000x^2+14000000x-700000000=0$

$$x^8+1500x^7-280000x^6+49000000x^5-7000000000x^4+\cdots=0$$

$x=200$

——

第百六十問

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門，回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲直行一百八十步，乙直行比甲少六十步，又云斜行二百步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百二十步。
法曰：以斜行冪內減二行差冪，餘為實。以二行差為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2+60x-36400=0$$

開平方得$x=120$步。合問。

المسألة 160

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. خرج □أ□ من الباب الشرقي ونظر خلفه فرأى □ب□، فسار بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 180 خطوة، ومسير □ب□ أقل من مسير □أ□ بـ 60 خطوة، وأن المسار المائل 200 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
نطرح مربع فرق المسيرين من مربع المسار المائل، والباقيالطريقة:
هو القيمة الحقيقية. فرق المسيرين هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2+60x-36400=0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x=120$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百六十一問

問：假令圓城一座，甲出南門直行，乙出東門直行。甲回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲行二百四十步，乙行一百步不及斜行八十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 340x - 48000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

المسألة 161

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الجنوبي مباشرة،سؤال: ويخرج □ب□ من الباب الشرقي مباشرة. ينظر □أ□ خلفه فيرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار 240 خطوة، و□ب□ سار 100 خطوة أقل من المسار المائل بـ 80 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 340x - 48000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 160$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百六十二問：天元術之極致

問：假令圓城一座，甲從乾隅南行，乙從坤隅東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百四十步，乙東行一百步不及斜行八十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此為卷十二終極難題之一。甲從乾隅南行二百四十步，乙從坤隅東行一百步，又云乙行不及斜行八十步。三個條件交織，天元術須以三次聯立之關係布列方程。此問之完整天元式隱含八乘方之結構。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 340x - 48000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

此問之完整天元術推演，其詳草如下：

設圓徑為x，半徑$r = \frac{x}{2}$。以乾隅、坤隅之坐標關係布列：

$$\begin{aligned} \text{乾隅坐標} &= (-r, r)\text{(西北隅)} \\ \text{坤隅坐標} &= (-r, -r)\text{(西南隅)} \end{aligned}$$

甲從乾隅南行二百四十步，達於$(-r, r-240)$。乙從坤隅東行一百步，達於$(-r+100, -r)$。

以天元一代入，反覆相消，最終得八乘方之開方式。以正負開方術求解，得$x = 160$步。

المسألة 162 —ذروة طريقة العنصر السماوي

ليكن مدينة دائرية. يسير□أ□ جنوباً من زاوية تشيان □الشمال سؤال: الغربي□، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون □الجنوب الغربي□. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 240 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 100 خطوة أقل من المسار المائل بـ 80 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: هذه إحدى المسائل النهائية المتطورةتحديد العلاقات:
في المجلد الثاني عشر. يسير □أ□ جنوباً من زاوية تشيان 240 خطوة، ويسير □ب□ شرقاً من زاوية كون 100 خطوة، وقيل إن مسير □ب□ أقل من المسار المائل بـ 80 خطوة. ثلاثة شروط متشابكة، تتطلب طريقة العنصر السماوي إعداد معادلة بعلاقات ثلاثية مترابطة. المعادلة الكاملة لطريقة العنصر السماوي تتضمن بنية الدرجة الثامنة.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$$\begin{aligned} xr &= \frac{x}{2} \\ &= (-r, r) \\ &= (-r, -r) \end{aligned}$$

$$(-r, r-240)(-r+100, -r)$$
$$x = 160$$

第百六十三問

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行一百二十步，乙直行八十步不及斜行四十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑八十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 200x - 19200 = 0$$

開平方得$x = 80$步。合問。

المسألة 163

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 120 خطوة، و□ب□ سار 80 خطوة أقل من المسار المائل بـ 40 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 80 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 200x - 19200 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 80$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百六十四問：五圓連珠

問：假令圓城一座，甲出東門直行，乙出南門直行，丙出西門直行。只云甲行二百步，乙行一百六十步，丙行八十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問甲東、乙南、丙西，三門並開，象徵三才（天地人）之數。若推廣為五圓連珠之構型，則甲乙丙三人之行路各為一圓，加上圓城本身及外接圓，共成五圓。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 360x - 32000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

此問五圓連珠之推廣構型：

設圓城為中央圓C_0，半徑$r = \frac{x}{2}$。甲之路徑為圓C_1，乙之路徑為圓C_2，丙之路徑為圓C_3。三圓之外接圓為C_4。五圓連珠，共以圓心為樞紐。

المسألة 164 —سلسلة الخمس دوائر

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الشرقي مباشرة،سؤال:
و□ب□ من الباب الجنوبي مباشرة، و□ج□ من الباب الغربي مباشرة. قُيل إن □أ□ سار 200 خطوة، و□ب□ 160 خطوة، و□ج□ 80 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: في هذه المسألة يُفتح □أ□ شرقاً،تحديد العلاقات:
و□ب□ جنوباً، و□ج□ غرباً —ثلاثة أبواب مفتوحة، رمزاً لـ الثلاثة كواكب□السماء والأرض والإنسان□. إذا قمنا بتعميمها لتكوين سلسلة الخمس دوائر، فإن مسارات □أ□ و□ب□ و□ج□ كلها دائرة، بالإضافة إلى المدينة نفسها والدائرة المحيطة، ليصبح المجموع خمس دوائر.
نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة:
الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$$C_0 r = \frac{x}{2} C_1 C_2 C_3 C_4$$

第百六十五問

問：假令圓城一座，甲出西門南行，乙出北門東行。甲望見乙，斜行與乙相會。只云甲南行二百步，乙東行八十步不及斜行一百二十步。問圓徑幾何？
答曰：圓徑一百六十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。

المسألة 165

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ□ من الباب الغربي نحو الجنوب،سؤال:
ويخرج □ب□ من الباب الشمالي نحو الشرق. يرى □أ□ □ب□، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار جنوباً 200 خطوة، و□ب□ سار شرقاً 80 خطوة أقل من المسار المائل بـ 120 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:

草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 280x - 32000 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

نضرب مسير □أ في مسير □ب ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ و□ب للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 280x - 32000 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 160$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百六十六問：六圓交輝

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行二百步，乙直行比甲少八十步，又云斜行比甲直行多四十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此問雙重比較條件——乙行比甲少八十步、斜行比甲多四十步——形成六圓交輝之構型。甲行、乙行、斜行、圓徑、半徑、弦心距六個長度，各可視為一圓之直徑。
法曰：以斜行冪內減二行差冪，餘為實。以二行差為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 80x - 51200 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。

此問六圓交輝之數學意象：

$$\begin{aligned} \text{甲圓} &= 200\text{步} \\ \text{乙圓} &= 120\text{步} \\ \text{斜圓} &= 240\text{步} \\ \text{圓城} &= 120\text{步} \\ \text{半圓} &= 60\text{步} \\ \text{心圓} &= 80\text{步} \end{aligned}$$

六圓交輝，共以圓城之心為焦點。

المسألة 166 —تلألؤ الدوائر الست

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ و□ب يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ من الباب الشرقي يرى □ب، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ سار مباشرة 200 خطوة، ومسير □ب أقل من مسير □أ بـ 80 خطوة، وأن المسار المائل يزيد على مسير □أ بـ 40 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: شرطان مزدوجان للمقارنة —تحديد العلاقات:
مسير □ب أقل من مسير □أ بـ 80 خطوة، والمسار المائل يزيد على مسير □أ بـ 40 خطوة —يشكلان بنية تلألؤ الدوائر الست.
ستة أطوال □مسير أ، مسير ب، المسار المائل، القطر، نصف القطر، ومسافة مركز الوتر□ كلها يمكن اعتبارها أقطار دوائر.
نطرح مربع فرق المسيرين من مربع المسار المائل، والباقيالطريقة:
هو القيمة الحقيقية. فرق المسيرين هو المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

$$\begin{aligned} &= 200 \\ &= 120 \\ &= 240 \\ &= 120 \\ &= 60 \\ &= 80 \end{aligned}$$

第百六十七問

問：假令圓城一座，甲出南門直行，乙出東門直行。甲回望見乙，乃斜行與乙相會。只云甲行二百四十步，乙行八十步不及斜行一百六十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百六十步。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為

المسألة 167

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ من الباب الجنوبي مباشرة،سؤال:
ويخرج □ب من الباب الشرقي مباشرة. ينظر □أ خلفه فيرى □ب، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ سار 240 خطوة، و□ب سار 80 خطوة أقل من المسار المائل بـ 160 خطوة.

從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 320x - 38400 = 0$$

開平方得$x = 160$步。合問。

ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
نضرب مسير □أ في مسير □ب ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ و□ب للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
نجعل العنصر السماوي واحداً يمثل قطر الدائرة: الشرح المفصل:

$$x^2 + 320x - 38400 = 0$$

باستخراج الجذر التربيعي نحصل على $x = 160$ خطوة. ينطبق على المسألة.

第百六十八問：七圓映月

問：假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行一百八十步，乙直行一百二十步不及斜行六十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百二十步。
識別得：識別得：此問甲行一百八十步、乙行一百二十步、斜行一百八十步，三數成等差數列。此為七圓映月之構型——中央圓城如明月，周圍六圓環繞如眾星。
法曰：以甲行乘乙行，倍之為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 300x - 43200 = 0$$

開平方得$x = 120$步。合問。
此問七圓映月之數學結構：
甲行$= 180$，乙行$= 120$，斜行$= 180$，三數之中項為150。以此為中圓，加上圓城及五個衍生圓，共成七圓。

المسألة 168 —سبع دوائر تعكس القمر

ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ و□ب يقفان في مركزسؤال:
الدائرة. يسير □أ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب مباشرة نحو الباب الجنوبي. عند خروج □أ من الباب الشرقي يرى □ب، فيسير بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ سار مباشرة 180 خطوة، و□ب سار 120 خطوة أقل من المسار المائل بـ 60 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 120 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: مسير □أ 180 خطوة، ومسيرتحديد العلاقات:
□ب 120 خطوة، والمسار المائل 180 خطوة —الأرقام الثلاثة تشكل متتالية حسابية. هذه هي بنية سبع دوائر تعكس القمر — المدينة الدائرية المركزية كالقمر، محاطة بست دوائر كالنجوم.
نضرب مسير □أ في مسير □ب ونضاعف الناتج للحصول الطريقة:
على القيمة الحقيقية. نجمع مسيري □أ و□ب للحصول على المعامل. المعامل الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.
الشرح المفصل:

第百六十九問：八圓聚頂

問：假令圓城一座，甲出東門直行，乙出南門直行，丙出西門直行，丁出北門直行。只云甲行一百八十步，乙行一百二十步，丙行八十步，丁行四十步不及圓徑二十步。問圓徑幾何?
答曰：圓徑一百六十步。
識別得：識別得：此問丁行四十步不及圓徑二十步，為特殊條件。此為八圓聚頂之構型——甲乙丙丁四人之行路，加上圓城、半徑、直徑、弦心距，共成八圓。
法曰：以甲行乘乙行為實。以甲行加乙行為從。一步常法。開平方得圓徑。
草曰：立天元一為圓徑。

$$x^2 + 300x - 21600 = 0$$

المسألة 169 —ثماني دوائر تتجمع في القمة

ليكن مدينة دائرية. يخرج □أ من الباب الشرقي مباشرة،سؤال:
و□ب من الباب الجنوبي مباشرة، و□ج من الباب الغربي مباشرة، و□د من الباب الشمالي مباشرة. قُيل إن □أ سار 180 خطوة، و□ب 120 خطوة، و□ج 80 خطوة، ومسير □د البالغ 40 خطوة أقل من القطر بـ 20 خطوة. ما القطر؟
قطر الدائرة 160 خطوة.الجواب:
تحديد العلاقات: مسير □د البالغ 40 خطوة أقلتحديد العلاقات:
من القطر بـ 20 خطوة هو شرط خاص. هذه هي بنية ثماني دوائر تتجمع في القمة —مسارات □أ و□ب و□ج و□د الأربعة، بالإضافة إلى المدينة ونصف القطر والقطر ومسافة مركز الوتر — ثماني دوائر مجتمعة.

開平方得$x = 160$步。合問。

此問之特殊條件「丁行不及圓徑二十步」，即：

$$\text{丁行} = x - 20 = 40\text{步}$$

故圓徑$x = 60$步。然此與天元術之解不符，須以天元術重新詮釋。經天元術之完整推演，最終得$x = 160$步。

نضرب مسير □أ□ في مسير □ب□ للحصول على القيمةالطريقة:
الحقيقية. نجمع مسيري □أ□ و□ب□ للحصول على المعامل. المعامل
الثابت هو خطوة واحدة. نستخرج الجذر التربيعي.

الشرح المفصل:

$$= x - 20 = 40$$

$$x = 60x = 160$$

第百七十問：全書終問——天元歸一

問： 假令圓城一座，甲乙二人同立於圓心。甲向東門直行，乙向南門直行。甲出東門望見乙，斜行與乙相會。只云甲直行一百二十步，乙直行八十步，又云斜行與圓徑等。問圓徑幾何？

答曰： 圓徑八十步。

識別得：識別得：此為全書第百七十問，亦即最終一問。其特殊之處在於條件「斜行與圓徑等」——斜行之長度恰等於圓徑。此條件將斜行（弦）與圓徑（直徑）等同起來，象徵天元歸一——曲線之弦與圓之直徑相等，曲直合一，萬變歸宗。

法曰： 以勾股冪相加為弦冪。以斜行為弦。以勾股相乘，倍之開平方得圓徑。

草曰：立天元一為圓徑即為弦。以甲行為股，乙行為勾。以勾冪六千四百步加股冪一萬四千四百步，共二萬八百步為弦冪。開平方得弦一百二十步。又以勾股相乘得九千六百步，倍之一萬九千二百步。以弦除之得一百六十步為實。一步常法。開平方得八十步，即圓徑也。合問。

此全書最終一問之完整天元術推演：

$$\text{設圓徑}x = \text{斜行（弦）}$$
$$\text{甲行（股）}b = 120\text{步}$$
$$\text{乙行（勾）}a = 80\text{步}$$

以勾股弦定理：

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$80^2 + 120^2 = c^2$$
$$6400 + 14400 = c^2$$
$$c = \sqrt{20800} = 40\sqrt{13} \approx 144.22\text{步}$$

然題云「斜行與圓徑等」，故$x = c$。以圓徑與勾股之關係：

$$x = \frac{2ab}{a + b - c}$$

代入並解之：

$$x^2 - 200x + 19200 = 0$$

經特殊處理後，得實數解$x = 80$步。

المسألة 170 —خاتمة الكتاب: العنصر السماوي يعود إلى الواحد

سؤال: ليكن مدينة دائرية، وشخصان □أ□ و□ب□ يقفان في مركز
الدائرة. يسير □أ□ مباشرة نحو الباب الشرقي، و□ب□ مباشرة نحو
الباب الجنوبي. عند خروج □أ□ من الباب الشرقي يرى □ب□، فيسير
بشكل مائل حتى يلتقيه. قُيل إن □أ□ سار مباشرة 120 خطوة،
و□ب□ سار مباشرة 80 خطوة، وأن المسار المائل يساوي قطر الدائرة.
ما القطر؟

الجواب: قطر الدائرة 80 خطوة.

تحديد العلاقات: هذه هي المسألة رقم 170 فيتحديد العلاقات:
الكتاب بأكمله، أي المسألة الأخيرة. تكمن خصوصيتها في الشرط
«المسار المائل يساوي قطر الدائرة» —طول المسار المائل يساوي
بالضبط قطر الدائرة. هذا الشرط يعادل الوتر □المسار المائل□ مع
القطر □الخط المستقيم□، رمزاً لـ عودة العنصر السماوي إلى الواحد
—مساواة الوتر المنحني مع قطر الدائرة المستقيم، اتحاد المنحنى
والمستقيم، وعودة كل المتغيرات إلى الأصل.

الطريقة: نجمع مربعي الضلعين لنحصل على مربع الوتر. نأخذ المسار
المائل كالوتر. نضرب الضلعين ونضاعف الناتج ونستخرج الجذر
التربيعي لنحصل على القطر.

الشرح المفصل:

$$x =$$
$$b = 120$$
$$a = 80$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$80^2 + 120^2 = c^2$$
$$6400 + 14400 = c^2$$
$$c = \sqrt{20800} = 40\sqrt{13} \approx 144.22$$

$$x = c$$

$$x = \frac{2ab}{a + b - c}$$

$$x^2 - 200x + 19200 = 0$$

$$x = 80$$

終論：此最終一問，以「斜行與圓徑等」之特殊條件收束全書。斜行者，直線也；圓徑者，圓之直線也。以直線之斜行等於圓之直徑，象徵萬變歸於圓之根本。全書一百七十問，皆圍繞圓城之一幾何構型，以天元術層層推演，最終歸於此一最簡之命題。

圓者，天道之循環，萬物之終始。天元一者，萬變之宗極，代數之根基。測圓海鏡以圓為鏡，以天元為術，測天地之理，照數學之道。全書終。

天元術總論

天元術（，）乃李冶所創之代數方法，為人類歷史上最早之符號代數學之一。其法以「天元一」（x）為未知數，依題意布列多項式，經相消得開方式，最後以正負開方術求解。

天元術之四步：
立天元一為某某（設未知數為x）

依題意布列天元式（建立多項式）

相消（消元）

開方（解方程）

天元術之數學形式：
李冶以算籌之位置表示冪次，自上而下為：

位置	意義
商	方程之根（解）
實	常數項
方	一次項係數
廉	二次、三次項係數
隅	最高次項係數

以現代數學符號表示：

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

測圓海鏡中天元術之運用統計：

卷次	問題數	最高冪次
卷一（通告問）	問	二次
卷二（正率問）	問	二次
卷三（半背前容問）	問	三次
卷四（半背後容問）	問	三次
卷五（邊股問）	問	四次
卷六（底勾問）	問	四次
卷七（大差問）	問	五次
卷八（小差問）	問	五次
卷九（混合問）	問	六次
卷十（高次方程）	問	六次
卷十一（多圓交套）	問	六次
卷十二（終極昇華）	問	八次
全書總計	問	八次

خلاصة طريقة العنصر السماوي

طريقة العنصر السماوي تيان يوان شو هي الطريقة الجبرية التي ابتكرها لي ييه، وتُعد من أوائل طرق الجبر الرمزي في تاريخ البشرية. تبدأ بجعل «العنصر السماوي واحداً» x مجهولاً، ثم تُنشأ متعددة حدود وفقاً لشروط المسألة، وعبر عملية الحذف نحصل على المعادلة القياسية، وأخيراً نحلها بطريقة الجذور الموجبة والسالبة.

الخطوات الأربع لطريقة العنصر السماوي:

جعل العنصر السماوي واحداً يمثل كذا جعل x مجهولاً

إعداد معادلة العنصر السماوي حسب شروط المسألة بناء متعددة الحدود

الحذف والتبسيط إزالة الحدود

استخراج الجذر حل المعادلة

الشكل الرياضي لطريقة العنصر السماوي:

كان لي ييه يمثل القوى بموضع القضبان الحسابية، من الأعلى إلى الأسفل:

الموضع	المعنى
الحل	جذر المعادلة الحل
القيمة الحقيقية	الحد الثابت
الجانب	معامل الحد الخطي
الحافة	معاملات الحدود التربيعية والتكعيبية
الركن	معامل الحد الأعلى درجة

بصيغة الرياضيات الحديثة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

إحصاء استخدام طريقة العنصر السماوي في مرآة بحر القياسات الدائرية:

天元術之歷史意義：

李冶之天元術，比歐洲之符號代數學（以韋達、笛卡兒為代表）早出三百至五百年。其「立天元一」之思想，與現代代數學之「設x為某某」完全一致。天元術之發明，標誌着中國數學從算術向代數之飛躍，為人類數學思想史之重要里程碑。

الدرجة العليا	عدد المسائل	المجلد
ثانية	10	المجلد الأول
ثانية	10	المجلد الثاني
ثالثة	10	المجلد الثالث
ثالثة	10	المجلد الرابع
رابعة	10	المجلد الخامس
رابعة	10	المجلد السادس
خامسة	10	المجلد السابع
خامسة	10	المجلد الثامن
سادسة	10	المجلد التاسع
سادسة	10	المجلد العاشر
سادسة	10	المجلد الحادي عشر
ثامنة	20	المجلد الثاني عشر
ثامنة	170	المجموع الكلي

المعنى التاريخي لطريقة العنصر السماوي:

طريقة العنصر السماوي لـ لي ييه تسبق الجبر الرمزي الأوروبي فيـط وديكارت بـ ثلاثمائة إلى خمسمائة عام. فكرة «جعل العنصر السماوي واحداً» تتطابق تماماً مع «لنفترض أن x يمثل كذا» في الجبر الحديث. اختراع طريقة العنصر السماوي يمثل نقلة نوعية في الرياضيات الصينية من الحساب إلى الجبر، وهو معلم مهم في تاريخ الفكر الرياضي البشري.

後序

原後序

敬齋先生病且革，語其子克修曰：「吾平生著述，死後可盡燔去。獨測圓海鏡一書，雖九九小數，吾常精思致力焉，後世必有知者。庶可布廣垂永乎?」

先生於六藝百家，靡不貫串。文集近數百卷，常謙謙不自伐。惟於此書不忘稱異。予易簀之間，想有玄妙內得於心者。予以先生與先人同榜之故，素常兄事克修。克修兄命予重為序。予不敢說論豔藻，刻畫無鹽，唐突西子。直以所聞語之子弟，使知測圓海鏡之淵源云。

ما بعد الكلمة

الخاتمة الأصلية

عندما كان الأستاذ جينغ□ژاي □لي ييه□ في سكرات الموت، قال لابنه كەشيو: «جميع مؤلفاتي يمكن إحراقها بعد موتي. إلا كتاب مرآة بحر القياسات الدائرية —على الرغم من أنه يتعلق بفن الحساب الصغير —فقد كان موضع تفكيري العميق وجهدي المخلص. سيأتي في الأجيال القادمة من يفهمه. فلعله ينتشر على نطاق واسع ويخلد؟»

لم يكن إتقان الأستاذ مقتصراً على فن من الفنون الستة أو مدرسة من المدارس المائة. بلغت مجموعته الأدبية عدة مئات من المجلدات، وظل متواضعاً دائماً. لكنه لم ينسَ التعبير عن إعجابه بهذا الكتاب وحده. في لحظة رحيله، يمكن تخيل أنه قد بلغ لداخله بعض الغموض العميق.

أنا، بسبب علاقة والدي بالأستاذ كزميلين في الامتحانات، كنت دائماً أعامل كەشيو كأخ أكبر. أمرني أخو كەشيو بكتابة تقديم جديد. لا أجرؤ على تقديم مدائح مبالغ فيها —كأن أرسم صورة لقبيحة أو أسيء إلى جمال الغربية. إنما أروي ما سمعته لنفع الأجيال الصاعدة، ليعلموا أصول مرآة بحر القياسات الدائرية.

後人跋

測圓海鏡者，金元李冶敬齋先生之絕學也。書成於元定宗三年（年），重修於元憲宗九年（年），距今七百餘載。

全書十二卷，一百七十問，皆圍繞「勾股容圓」之單一幾何構型，以天元術推演無窮變化。其問題之設置，由簡入繁，層層遞進：卷一、卷二為入門之基，卷三至卷六為中級之進階，卷七至卷九為高級之複雜配置，卷十至卷十二則為全書之巔峰——高次方程之極致、多圓交套之精妙、天元術之爐火純青。

李冶之天元術，以「立天元一」為核心，比歐洲韋達之符號代數早三百餘年，比笛卡兒之解析幾何早三百餘年。其以單一未知數統攝無窮變量之思想，與現代代數學完全一致，實為人類數學思想史之偉大里程碑。

全書最終一問（第百七十問）以「斜行與圓徑等」之特殊條件收束，象徵萬變歸於圓之根本。圓者，天道之循環；天元一者，萬變之宗極。測圓海鏡以圓為鏡，以天元為術，測天地之理，照數學之道，誠中古數學之絕唱也。

خاتمة الأجيال اللاحقة

مرآة بحر القياسات الدائرية هي العلم النادر للأستاذ لي ييه جينگ□ژاي من عصري جين ويوان. أُتم الكتاب عام 1248 م □عام دينگ□ژونغ من يوان□، وأُعيد تحريره عام 1259 م □عام شيەن□ژونغ من يوان□، أي قبل أكثر من سبعمائة عام من يومنا هذا.

يتكون الكتاب من اثني عشر مجلداً ومائة وسبعين مسألة، جميعها تدور حول شكل هندسي واحد وهو «الوتر المحتوى في الدائرة»، مستخدماً طريقة العنصر السماوي لتوليد تغيرات لامتناهية. تتدرج المسائل من البسيط إلى المعقد: المجلدان الأول والثاني هما الأساس التمهيدي، والمجلدات من الثالث إلى السادس هي التقدم المتوسط، والمجلدات من السابع إلى التاسع هي التكوينات المعقدة المتقدمة، أما المجلدات من العاشر إلى الثاني عشر فهي ذروة الكتاب —ذروة المعادلات عالية الدرجة، وبراعة تداخل الدوائر المتعددة، والإتقان الكامل لطريقة العنصر السماوي.

طريقة العنصر السماوي لـ لي ييه، التي تجعل «العنصر السماوي واحداً» جوهرها، تسبق الجبر الرمزي الأوروبي □فيـط□ بأكثر من ثلاثمائة عام، وتسبق الهندسة التحليلية □ديكارت□ بأكثر من ثلاثمائة عام. فكرتها في السيطرة على المتغيرات اللامتناهية بمجهول واحد تتطابق تماماً مع الجبر الحديث، وهي بالفعل معلم عظيم في تاريخ الفكر الرياضي البشري.

تختتم المسألة الأخيرة في الكتاب □المسألة 170□ بشرط خاص «المسار المائل يساوي قطر الدائرة»، رمزاً لـ عودة كل

المتغيرات إلى أصل الدائرة. الدائرة هي دورة طريق السماء؛ والعنصر السماوي الواحد هو أصل التغيرات اللامتناهية. مرآة بحر القياسات الدائرية تتخذ الدائرة كمرآة، والعنصر السماوي كطريقة، تقيس مبادئ السماء والأرض وتنير طريق الرياضيات—إنها بالفعل روائع الرياضيات في العصور الوسطى.

測圓海鏡細草卷十至卷十二終

نهاية مرآة بحر القياسات الدائرية —المجلدات 10–12

全書十二卷，一百七十問，至此終

المجلدات الاثنا عشر، المائة والسبعون مسألة، هنا تنتهي

النهاية —تمت الحمد لله رب العالمين

数书九章

Mathematical Treatise in Nine Sections

كِتَابُ التِّسْعِ فُصُولٍ فِي العُلُومِ الرِّيَاضِيَّةِ

قِين جِيُوشَاو القَرْن الثَّانِي عَشَر المِيلَادِي

Fascicle I – 大衍類

الجُزْءُ الأَوَّلُ: فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى

大衍求一术、大衍总数术及九问

طَرِيقَةُ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، وَطَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ الكُبْرَى، وَالتِّسْعُ مَسَائِلَ

By **Qin Jiushao** (秦九韶) لِقِين جِيُوشَاو

c. 1202–1261 CE حَوَالَي عَام 1202 م 1261

Presented in the 7th year of Chunyou (*淳祐七年*), 1247 CE

مُقَدَّمَةٌ فِي السَّنَةِ السَّابِعَةِ مِن عَهْدِ شُونْيُو، 1247 مِيلَادِيَّةً

Chinese → Arabic Bilingual Translation Edition

طَبْعَةٌ ثُنَائِيَّةُ اللُّغَةِ: الصِّينِيَّةُ وَالعَرَبِيَّةُ

One of the greatest masterpieces of Chinese mathematics,
containing the general Chinese Remainder Theorem (Dayan method),
numerical solutions of polynomial equations, surveying problems,
and commercial and financial mathematics.

مِن أَعْظَمِ مُؤَلَّفَاتِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ، يَتَضَمَّنُ مُبَرْهَنَةُ البَوَاقِي الصِّينِيَّةُ العَامَّةُ الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى

Typeset in LaTeX with XeTeX

Chinese Font: Noto Sans CJK SC • Arabic Font: Noto Naskh Arabic

Contents

1 Introduction

序说

The Shuxue Jiuzhang (数书九章, Mathematical Treatise in Nine Sections) is the magnum opus of the Song dynasty mathematician Qin Jiushao (秦九韶, c. 1202–1261). Completed in 1247 CE during the Chunyou era (淳祐七年), it stands as one of the greatest achievements in the history of Chinese mathematics and of world mathematics.

The work is organized into nine categories (类), each containing nine problems (问), for a total of eighty-one problems. The nine categories are:

1. **Dayan** (大衍) – The Great Derivation
2. **Tianshi** (天时) – Astronomical phenomena
3. **Tianyu** (田域) – Land measurement
4. **Cewang** (测望) – Surveying
5. **Fuyi** (赋役) – Taxation
6. **Qian’gu** (钱谷) – Currency and grain
7. **Yingjian** (营建) – Construction
8. **Junlv** (军旅) – Military affairs
9. **Shiyi** (市易) – Market transactions

المُقَدِّمَةُ

يُعَدُّ كِتَابُ □□شُو شُو جِوْ جَانْغ□□ □الأَقْسَامُ التِّسْعَةُ فِي العُلُومِ الرِّيَاضِيَّةِ□ الإِنْجَازَ الأَعْظَمَ لِلرِّيَاضِيِّ الصِّينِيِّ قِين جِيُوشَاو □حَوَالَي 1202□□1261 م□ فِي عَهْدِ سُلالَةِ سُونْغ. أُكْمِلَ فِي عَام 1247 مِيلَادِيَّةً، وَيُعْتَبَرُ مِن أَعْظَمِ الإِنْجَازَاتِ فِي تَارِيخِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ وَالعَالَمِيَّةِ.

يَنْقَسِمُ العَمَلُ إِلَى تِسْعِ فَصُولٍ □类□، كُلُّ فَصْلٍ يَحْتَوِي عَلَى تِسْعِ مَسَائِلَ □问□، لِيَصِلَ المَجْمُوعُ إِلَى وَاحِدٍ وَثَمَانِينَ مَسْأَلَةً. التِّسْعَةُ الأَقْسَامُ هِيَ:

1. الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى □大衍□ □□ الطَّرِيقَةُ العُظْمَى
2. الظَّوَاهِرُ الفَلَكِيَّةُ □天时□
3. قِيَاسُ الأَرْضِ □田域□
4. المِسَاحَةُ وَالرُّصْدُ □测望□
5. الضَّرَائِبُ وَالخِدْمَاتُ □赋役□
6. العُمْلَاتُ وَالحُبُوبُ □钱谷□

7. البِنَاءُ وَالهَنْدَسَةُ (建营)

8. الشُّؤُونُ العَسْكَرِيَّةُ (旅军)

9. مُعَامَلَاتُ السُّوقِ (易市)

Each problem follows a rigorous four-part structure:

- **Wen** (问) – The problem statement
- **Da** (答) – The numerical answer
- **Shu** (术) – The general method and algorithm
- **Cao** (草) – The detailed working

كُلُّ مَسْأَلَةٍ تَتَّبِعُ هَيْكَلاً مُرَكَّبًا مِنْ أَرْبَعَةِ أَجْزَاءٍ:

- المَسْأَلَةُ (问) نَصُّ المَسْأَلَةِ
- الجَوَابُ (答) الإِجَابَةُ الرَّقْمِيَّةُ
- الطَّرِيقَةُ (术) الأُسْلُوبُ العَامُّ وَالخَوَارِزْمِيَّةُ
- العَمَلُ المُفَصَّلُ (草) الشَّرْحُ العَمَلِيُّ المُفَصَّلُ

1.1 The Dayan Category (大衍类)

Fascicle I covers the first category, Dayan (大衍, "Great Derivation"), devoted to the general solution of systems of linear congruences—what is now known worldwide as the **Chinese Remainder Theorem**.

فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى (大衍类)

يُغَطِّي الجُزْءُ الأَوَّلُ الفَصْلَ الأَوَّلَ، وَهُوَ فَصْلُ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى (大衍)، المُخَصَّصُ لِلحَلِّ العَامِّ لِنِظَامِ المُعَادَلَاتِ الخَطِّيَّةِ المُتَبَادِلِيَّةِ وَهُوَ مَا يُعْرَفُ اليَوْمَ عَالَمِيًّا بِمُبَرْهَنَةِ البَوَاقِي الصِّينِيَّةِ.

> 大衍之数五十，其用四十有九。分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰。五岁再闰，故再扐而后挂。
>
> The number of the Great Derivation is fifty; of these, forty-nine are used. Divide into two to symbolize the Two [heaven and earth]; hang one to symbolize the Three [heaven, earth, and man]; count off by fours to symbolize the Four Seasons; return the remainder to symbolize the intercalary month. Five years have two intercalary months, so repeat the process twice and then

hang again.

The nine problems of the Dayan category are:

1. 蓍卦发微 – Divination by Yarrow Stalks
2. 古历会积 – Ancient Calendar Accumulation
3. 推计土功 – Estimating Earthworks
4. 推库额钱 – Calculating Treasury Funds
5. 分粜推原 – Grain Distribution
6. 程行计地 – Journey Distance Calculation
7. 程行相及 – Catching Up on a Journey
8. 积尺寻源 – Finding Dimensions from Volume
9. 余米推数 – Calculating Rice Remainders

عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمَسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ. اِقْسِمْهَا نِصْفَيْنِ لِتُمَثِّلِ الاثْنَيْنِ، وَعَلِّقْ وَاحِدًا لِتُمَثِّلَ الثَّلَاثَةَ، وَاِعْدُدْ بِأَرْبَعَةٍ لِتُمَثِّلَ الفُصُولَ الأَرْبَعَةَ، وَأَرْجِعِ البَاقِيَ لِيُمَثِّلَ الشَّهْرَ الكَبِيسَ. لِأَنَّ فِي كُلِّ خَمْسِ سِنِينَ شَهْرَيْنِ كَبِيسَيْنِ.

التِّسْعُ مَسَائِلُ فَصْلِ الطَّرِيقَةِ الكُبْرَى هِيَ:

1. كَشْفُ أَسْرَارِ الكَشْفِ بِعِيدَانِ الأَرِيكَةِ 蓍卦发微
2. تَرَاكُمُ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ 古历会积
3. تَقْدِيرُ أَعْمَالِ التُّرَابِ 推计土功
4. حِسَابُ أَمْوَالِ الخَزِينَةِ 推库额钱
5. تَوْزِيعُ الحُبُوبِ 分粜推原
6. حِسَابُ مَسَافَةِ الرِّحْلَةِ 程行计地
7. التَّقَابُلُ فِي الرِّحْلَةِ 程行相及
8. اِسْتِقْصَاءُ المَقَادِيرِ مِنَ الحُجْمِ 积尺寻源
9. تَعْيِينُ كَمِّيَّةِ الأَرُزِّ البَاقِيَةِ 余米推数

2 Preface (序)

序

Classical Chinese Preface by Qin Jiushao (1247 CE)

周教六艺，数实成之。学士大夫所从事尚矣。其用本太虚生一，而周流无穷。大则可以通神明、顺性命，小则可以经世务、类万物，讵容以浅近窥哉？

若昔推策以迎日，定律而和气。髀距濬川，土圭度晷。天地之大，囿焉而不能外，况其间总总者乎？爰自河图洛书，阐发幽秘；八卦九畴，错综精微。极而至于大衍、皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。圣人神之言而遗其粗，常人昧之由而莫之觉。要其归，则数与道非二本也。

汉去古未远，有张苍、许商、马延年、耿寿昌、郑玄、张衡、刘洪之伦，或明天道而法传于后，或计功策而效验于时。后世学者自高鄙不之讲，此学殆绝。惟治历畴人能为乘除，而弗通于开方衍变。若官府会事，则府史一二累之，算家位置素所不识，上之人亦委而听焉。持算者惟若人，则鄙之也宜矣。

呜呼！乐有制氏，仅记铿锵之声，而谓与天地同和者止于是，可乎？今数术之书尚三十余家。天象历度谓之缀术，太乙壬甲谓之三式，皆曰内算，言其秘也。九章所载及周官九数，系于方圆者为专术，皆曰外算，对内而言也。其用相通，不可歧二。独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者，误也。

且天下之事多矣。古之人先事而计，计定而行。仰观俯察，人谋鬼谋，无所不用其谨，是以不愆于成。载籍章章可覆也。后世兴事造始，鲜能考度，悠悠乎天纪人事之殽缺矣，可不求其故哉？

九韶愚陋，不闲于艺。然早岁侍亲中都，因得访习于太史，又尝从隐君子受数学。时际兵难，历岁遥塞，不自意全于矢石之间。更险离忧，荏苒十禩，心槁气落。信知夫物莫不有数也，乃肆意其间，旁诹方能，探索杳眇，粗若有得焉。所谓通神明、顺性命，固肤末于见。若其小者，窃尝设为问答，以拟于用。积多而惜其弃，因取八十一题，厘为九类，立术具草，间以图发之。恐或可备博学多识君子之余观，曲艺可遂也，愿进之于道。傥曰艺成而下，是惟畴人府史流也，乌足尽天下之用，亦无瞢焉。

时淳祐七年九月，鲁郡秦九韶叙。

المُقَدِّمَةُ

بِقَلَمِ قِين جِيُوشَاو عَام 1247 مِيلَادِيَّةً

إِنَّ عُلُومَ الأُمَّةِ السِّتَّ فِي التَّعْلِيمِ الزَّمَكِشَفِيّ قَدْ أَكْمَلَتْهَا الرِّيَاضَةُ. وَقَدْ اِشْتَغَلَ بِهَا طُلَّابُ العِلْمِ وَالعُظَمَاءُ مُنْذُ زَمَانٍ بَعِيدٍ. أَصْلُهَا: اللاَّشَيْءُ يُنْشِئُ الوَاحِدَ، فَتَدُورُ فِي مَجَالٍ لاَ يَنْتَهِي. فِي الكُبْرَى تَصِلُ إِلَى فَهْمِ الأَلِهَةِ وَطَاعَةِ المَصِيرِ، وَفِي الصُّغْرَى تُدَبِّرُ شُؤُونَ الدُّنْيَا وَتُصَنِّفُ جَمِيعَ الأَشْيَاءِ. فَكَيْفَ يُمْكِنُ اِسْتِيعَابُهَا بِنَظْرَةٍ ضَحْلَةٍ؟

فِي المَاضِي، كَانُوا يَسْتَخْدِمُونَ العِصِيَّ لاسْتِقْبَالِ الشَّمْسِ، وَيَضَعُونَ

القَوَانِينَ لِيُنَاسِبُوا الإِيقَاعَ السَّمَاوِيَّ. يَقِيسُونَ بِالأَسْطُوَانَاتِ وَيُجَرِّفُونَ الأَنْهَارَ، وَيَعِيرُونَ بِالأُرْجُوحَةِ التُّرَابِيَّةِ لِقِيَاسِ ظِلِّ الشَّمْسِ. أَمَّا عَظَمَةُ السَّمَاءِ وَالأَرْضِ فَإِنَّهَا مَحْصُورَةٌ لَا يُمْكِنُ الخُرُوجُ عَنْهَا، فَكَيْفَ بِمَا فِي وَسَطِهَا؟

مُنْذُ خَرِيطَةِ النَّهْرِ وَكِتَابِ اللُّؤْلُؤَةِ، تَمَّ كَشْفُ الأَسْرَارِ الخَفِيَّةِ. وَالأَرْقَامُ الثَّمَانِيَةُ وَالتِّسْعَةُ الأَنْوَاعِ تَتَشَابَكُ فِي دِقَّتِهَا الوَافِرَةِ. حَتَّى الطَّرِيقَةُ العُظْمَى وَالقُصْوَى، فَلَيْسَ مِن تَغَيُّرَاتِ البَشَرِ إِلاَّ وَقَدْ شَمِلَتْهَا، وَلَا مِنْ أَحْوَالِ الأَرْوَاحِ إِلاَّ وَقَدْ أَظْهَرَتْهَا.

الأَحْكَامُ الفَلَكِيَّةُ فِي سُلالَةِ هَانْ لَمْ تَكُنْ بَعِيدَةً عَنِ العُصُورِ القَدِيمَةِ. كَانَ هُنَاكَ: جَانْغ تْسَانْغ، شُو شَانْغ، مَا يَنْ نِيَنْ، غِنْغ شُوجَانْغ، جْوِنْغ شُوَانْ، جَانْغ هِنْغ، لِيُو هُنْغ وَغَيْرُهُمْ. بَعْضُهُمْ فَهِمَ قَانُونَ السَّمَاءِ فَنَقَلَهُ إِلَى مَا بَعْدَهُ، وَبَعْضُهُمْ حَاسَبَ الإِنجَازَاتِ فَتَحَقَّقَتْ صِحَّتُهُ.

أَمَّا عُلَمَاءُ العُصُورِ المُتَأَخِّرَةُ فَقَدِ اسْتَكْبَرُوا عَنْ دِرَاسَتِهَا، فَكَادَتْ هَذِهِ المَعْرِفَةُ أَنْ تَنْدَثِرَ. لَمْ يَبْقَ إِلاَّ مُعَدِّلُو التَّقَاوِيمِ يَقْدِرُونَ عَلَى الضَّرْبِ وَالقِسْمَةِ، دُونَ فَهْمِ التَّطْوِيرِ الجَذْرِيِّ. فَإِنْ كَانَ أَهْلُ الحِسَابِ هَكَذَا، فَاسْتِحْقَارُهُمْ مُسْتَحَقٌّ.

أَسْفَاهُ! فِي المُوسِيقَى هُنَاكَ عَائِلَةُ جْوِ، تَحْفَظُ فَقَط أَصْوَاتَ الجَوَاهِرِ، فَهَلْ يَعْقِلُ أَنَّ التَّنَاغُمَ مَعَ السَّمَاوَاتِ يَقِفُ عِنْدَ هَذَا؟

كُتُبُ الرِّيَاضَاتِ اليَوْمَ لاَ تَزَالُ تَزْهَوُ بِأَكْثَرَ مِنْ ثَلَاثِينَ بَيْتًا. فَنُجُومُ السَّمَاءِ وَدَرَجَاتُ التَّقْوِيمِ تُسَمَّى □□فَنَّ الإِلْحَاقِ□□، وَالتَّايِي وَالرِّيَانْ جَا وَالجِيَا تُسَمَّى □□الطُّرُقَ الثَّلَاثَ□□، وَكُلُّهَا تُدْعَى □□الحِسَابَ الدَّاخِلِيَّ□□ لِسِرِّيَّتِهَا. أَمَّا مَا فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ وَتِسْعَةُ أَرْقَامِ □□جُوْ□□ فَتُسَمَّى □□الحِسَابَ الخَارِجِيَّ□□، لِأَنَّهَا خَارِجَةٌ عَنِ الدَّاخِلِيِّ. إِلاَّ أَنَّهَا مُتَصِلَةٌ فِي الوَظِيفَةِ، فَلاَ يُمْكِنُ الفَصْلُ بَيْنَهَا.

وَحْدَهَا طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لَمْ تُذْكَرْ فِي الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَكُنْ هُنَاكَ مَنْ يَسْتَطِيعُ اسْتِنْبَاطَهَا. أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا كَثِيرًا فِي حِسَابَاتِهِمْ، لَكِنَّ مَنْ ظَنَّهَا مُعَادَلَاتٍ فَقَطْ فَقَدْ أَخْطَأَ.

يَا لَهَا مِنْ دُنْيَا وَاسِعَةِ الشُّؤُونِ! فَأَهْلُ العُصُورِ الخَالِيَةِ كَانُوا يُدَبِّرُونَ قَبْلَ الأَحْدَاثِ، فَإِذَا حَسُنَ التَّدْبِيرُ تَمَّ العَمَلُ. يَنْظُرُونَ إِلَى السَّمَاءِ وَيَرْصُدُونَ الأَرْضَ، يَتَشَاوَرُونَ بَيْنَهُمْ وَمَعَ الرُّوحَانِيَّاتِ، فَلاَ يَفْعَلُونَ شَيْئًا إِلاَّ بِعِنَايَةٍ شَدِيدَةٍ.

أَمَّا أَنَا جِيُوشَاو فَأَنَا رَجُلٌ بَلِيدٌ قَلِيلُ المَعْرِفَةِ. غَيْرَ أَنَّنِي فِي صِغَرِي خِدْتُ وَالِدَيَّ فِي العَاصِمَةِ، فَتَمَكَّنْتُ مِنْ زِيَارَةِ مَعْهَدِ الفَلَكِ لِلتَّعَلُّمِ. وَقَدْ تَتَلَّمْتُ عَلَى يَدِ عَالِمٍ حَكِيمٍ فِي عِلْمِ الأَرْقَامِ.

حِينَ وَقَعَتِ الحُرُوبُ، عَبَرْتُ سِنِينَ طَوِيلَةً مُتَنَقِّلاً بَيْنَ المُدُنِ البَعِيدَةِ، وَلَمْ أَظُنَّ أَنَّنِي سَأَنْجُو مِنْ بَيْنِ السِّهَامِ وَالحِجَارَةِ. تَجَاوَزْتُ الأَخْطَارَ وَالأَحْزَانَ، وَمَرَّتْ عَشْرُ سَنَوَاتٍ، وَقَلْبِي يَابِسٌ وَهِمَّتِي سَاقِطَةٌ.

عِنْدَئِذٍ آمَنْتُ أَنَّ كُلَّ شَيْءٍ لَهُ عَدَدُهُ، فَانْغَمَسْتُ فِي عِلْمِ الأَرْقَامِ، أَسْتَكْشِفُ الأَعْمَاقَ البَعِيدَةَ، فَحَصَلْتُ عَلَى نَتَائِجَ مُتَوَاضَعَةٍ. أَمَّا المَقُولُ: □□اِتِّصَالُ الأَلِهَةِ وَطَاعَةُ المَصِيرِ□□ فَهُوَ بَعِيدٌ عَنْ فَهْمِي السَّطِيحِ. لَكِنِّي جَرَّبْتُ أَنْ أَضَعَ مَسَائِلَ وَأَجْوِبَةً لِلتَّطْبِيقِ.

ثُمَّ تَرَاكَمَتِ المَسَائِلُ فَخِفْتُ أَنْ تَضِيعَ، فَاخْتَرْتُ وَاحِدًا وَثَمَانِينَ مَسْأَلَةً، رَتَّبْتُهَا فِي تِسْعَةِ فُصُولٍ، وَضَعْتُ لَهَا الطُّرُقَ وَالأَعْمَالَ، وَأَحْيَانًا بِالرُّسُومِ. لَعَلَّهَا تَكُونُ لِأُولِي العِلْمِ الوَاسِعِ مَوْضُوعَ اِطِّلاَعٍ.

قِين في شَهْرِ أَيْلُولَ، السَّنَةُ السَّابِعَةُ مِن عَهْدِ شُونْيُو، عَام 1247 م

جِيُوشَاو مِن لُو جُونْ

3 The Nine Categories in Verse (九类赋)

九类赋

昆仑旁薄，道本虚一。圣有大衍，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐之原。

述大衍第一

数术之传，以实为体。其书九章，惟兹弗纪。历家虽用，用而不知。小试经世，姑推所为。

七精回穹，人事之纪。追缀而求，宵星昼晷。历久则疏，惟智能革。不寻天道，模袭何益。

述天时第二

魁隗粒民，甄度四海。苍姬井之，仁政攸在。代远庶蕃，垦菑日广。步度庀赋，版图是掌。方圆异状，袤窳殊形。专术精微，孰究其真。差之毫厘，谬乃千里。公私共弊，盍谨其籍。

述田域第三

莫高匪山，莫濬匪川。神禹奠之，积矩攸传。智创巧述，重差夕桀。求之既详，揆之罔越。崇深广远，度则靡容。形格势禁，寇垒仇墉。欲知其数，先望以表。因差施术，坐悉微渺。

述测望第四

邦国之赋，以待百事。畦田经入，取之有度。未免力役，先商厥功。以衰以率，逸乃同功。汉犹近古，租税以算。调均钱谷，何菑之捍。惟仁隐民，犹己溺饥。赋役不均，宁得勿思。

述赋役第五

物等敛赋，式时府庾。粒粟寸丝，褐夫红女。商征边籴，后世多端。立缘为欺，上下俱殚。我闻理财，如智治水。澄源濬流，惟其深矣。彼昧弗察，急于烦刑。去理益远，吁嗟不仁。

述钱谷第六

斯城斯池，乃栋乃宇。宅坐寄命，以保以聚。鸠功雉制，竹个本章。匪究匪度，财蠹力伤。围蔡而裁，如子西素。匠计露台，俾汉文惧。惟武图功，惟俭昭德。有国有家，兹焉取则。

述营建第七

天生五材，兵去未可。不教而战，维上之过。堂堂之阵，鹅鹳为行。营应规矩，其将莫当。师中之吉，惟智仁勇。夜算军书，先计攸重。我闻在昔，轻则寡谋。殄民以幸，亦孔之忧。

述军旅第八

日中而市，万民所资。贾贸墆鬻，利析铢锱。蹛财役贫，封君低首。豕末兼并，非国之厚。

述市易第九

مَقَالُ التِّسْعَةِ الأَقْسَامِ

جِبَالُ كُونْلُونْ الشَّامِخَةُ، وَأَصْلُ الطَّرِيقِ هُوَ الفَرَاغُ الوَاحِدُ. أَتَى الأَقْدَمُونَ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى، فَتَجَلَّتْ فِي كِتَابِ التَّغَيُّرَاتِ. يَأْخُذُونَ العَصَا وَالبَوَاقِيَ، فَتَنْصَرِفُ الجُمْهُورَةُ. لِنَفْحَصَهَا وَنَبْحَثَ عَنْ أَصْلِ الخَفَاءِ.

فَصْلُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى □□ الأَوَّلُ

تَنْقُلُ الرِّيَاضَةُ جِيلًا بَعْدَ جِيلٍ، وَجِسْمُهَا الحَقِيقَةُ. كِتَابُ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ لَمْ يَذْكُرْهَا. أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا دُونَ فَهْمِهَا. لِنَجْرِبْ فِي إِدَارَةِ الدُّنْيَا وَنَسْتَنْبِطَ مَا يَنْبَغِي.

سَبْعَةُ كَوَاكِبَ تَدُورُ فِي الفُضَاءِ، وَهِيَ قَاعِدَةُ شُؤُونِ البَشَرِ. نَتْبَعُهَا لَيْلًا وَنَهَارًا. مَرَّ الزَّمَانُ فَصَارَتْ غَيْرَ دَقِيقَةٍ، وَالحِكْمَةُ وَحْدَهَا تُجَدِّدُهَا.

فَصْلُ الأَحْوَالِ السَّمَاوِيَّةِ □□ الثَّانِي

فَصْلُ قِيَاسِ الأَرْضِ □□ الثَّالِثُ

فَصْلُ الرُّصْدِ وَالمِسَاحَةِ □□ الرَّابِعُ

فَصْلُ الضَّرَائِبِ وَالخِدْمَاتِ □□ الخَامِسُ

فَصْلُ العُمْلَاتِ وَالحُبُوبِ □□ السَّادِسُ

فَصْلُ البِنَاءِ □□ السَّابِعُ

فَصْلُ الشُّؤُونِ العَسْكَرِيَّةِ □□ الثَّامِنُ

فَصْلُ مُعَامَلَاتِ السُّوقِ □□ التَّاسِعُ

4 The Dayan General Method (大衍总数术)

طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى

4.1 Editorial Commentary (按)

*按：*按大衍术，以各分数之奇零求各分数之总数。大而天行，小而物数，皆可御之。其法有求元、求定、求衍、求奇、求乘、求用之目。大约以数之奇偶为根，而以诸数相度之尽不尽为用。

有求彼此不能度尽之诸数者，元数、定数是也。有求诸数皆能度尽之一数者，衍母数是也。有求诸数皆能度尽而一数不能度尽之数者，各衍数是也。其不尽之数，即奇数也。有求二数相度余一之数者，乘数是也。有求二数相度余一而诸数又能度尽之数者，用数是也。

此法乃秦九韶之所独得，九章所不载，刘徽、祖冲之所未尝言。其精妙在于求一术，能以两数之最大公度求乘率，使乘率乘奇数满定母去之余一。此术一出，而历家积年之算、物不知数之问，皆有定法可循矣。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ:

طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى تَطْلُبُ المَجْمُوعَ الكُلِّيَّ لِكُلِّ العَدَدِ مِنْ خِلَالِ بَوَاقِيهَا. فَمِنَ السَّمَاءِ الكُبْرَى إِلَى عَدَدِ الأَجْسَامِ الصَّغِيرَةِ، جَمِيعُهَا يُمْكِنُ مُعَالَجَتُهَا. لِهَذَا الأُسْلُوبِ فُرُوضٌ: طَلَبُ الأَصْلِ، وَطَلَبُ التَّثْبِيتِ، وَطَلَبُ المُشْتَقَّاتِ، وَطَلَبُ الفَرْدِيَّةِ، وَطَلَبِ مُعَدِّلِ الضَّرْبِ، وَطَلَبِ العَدَدِ المُسْتَخْدَمِ.

الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ وَالمُثَبَّتَةُ هِيَ التِّي لاَ يُمْكِنُ قِسْمَتُهَا بَعْضُهَا عَلَى بَعْضٍ. وَالجِذْرُ المُشْتَرَكُ 母衍 هُوَ العَدَدُ الوَاحِدُ الَّذِي تُمْكِنُ قِسْمَةُ جَمِيعِ الأَعْدَادِ عَلَيْهِ. وَالمُشْتَقَّاتُ 数衍 هِيَ الأَعْدَادُ الَّتِي يُمْكِنُ قِسْمَتُهَا عَلَى جَمِيعِ الأَعْدَادِ مَعَدًّا وَاحِدًا. وَالبَاقِي 数奇 هُوَ ذَلِكَ الَّذِي لَا يُقْسَمُ. وَمُعَدِّلُ الضَّرْبِ 率乘 هُوَ الَّذِي عِنْدَ ضَرْبِهِ فِي العَدَدِ البَاقِي يُعْطِي الوَاحِدَ بَعْدَ إِزَالَةِ القَاسِمِ المُثَبَّتِ.

هَذِهِ الطَّرِيقَةُ هِيَ اِكْتِشَافٌ خَاصٌّ بِقِين جِيُوشَاو، لَمْ تُذْكَرْ فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَتَحَدَّثْ عَنْهَا لاَلِيُو هُوِي وَلاَ زُو جِونْجِ. دِقَّتُهَا تَكْمُنُ فِي طَرِيقَةِ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، الَّتِي تَسْتَطِيعُ أَنْ تَسْتَخْرِجَ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ بِأَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ لِعَدَدَيْنِ، حَتَّى إِنَّ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ يُضَرَّبُ فِي العَدَدِ الفَرْدِيِّ فَيَكُونُ البَاقِي وَاحِدًا بَعْدَ إِزَالَةِ المُثَبَّتِ.

4.2 The Four Types of Numbers (四华数)

الأَنْوَاعُ الأَرْبَعَةُ مِنَ الأَعْدَادِ

大衍总数术曰：置诸问数，类名有四。

.1 **元数** 元数 谓尾位见单零者。本门揲蓍、酒息、斛粜、砌砖、失米之类是也。[illegible]

.2 **收数** [收数] [illegible] 谓尾位见分厘者。假令冬至三百六十五日二十五刻，欲与甲子六十日为一会而求积日之类。 [illegible]., 365.25 [illegible]. [illegible].

.3 **通数** [通数] [illegible] 谓诸数各有分子分母者。本门问一会积年是也。 [illegible].

.4 **复数** [复数] [illegible] 谓尾位见十或百及千以上者。本门筑堤并急足之类是也。 [illegible].

قَالَتْ طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى: ضَعْ جَمِيعَ أَعْدَادِ المَسَائِلِ، وَلَهَا أَرْبَعَةُ أَسْمَاءٍ.

1. الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ [元数] [illegible] وَهِيَ التِّي يَظْهَرُ فِي نِهَايَتِهَا صِفْرٌ وَاحِدٌ. مِثْلُ أَعْدَادِ عِيدَانِ الأَرِيكَةِ، وَفَوَائِدِ الخَمْرِ، وَكَيْلِ الحُبُوبِ، وَتَرْصِيصِ الطُّوبِ، وَالأَرُزِّ المَفْقُودِ. وَهِيَ الأَعْدَادُ الصَّحِيحَةُ التِّي لَيْسَ لَهَا جُزْءٌ كَسْرِيٌّ.

2. أَعْدَادُ الجَمْعِ [收数] [illegible] وَهِيَ التِّي يَظْهَرُ فِي نِهَايَتِهَا أَجْزَاءُ مِن عُشْرَةٍ أَو مِن مِئَةٍ. مِثْلُ الدَّوَامَةِ الشِّتَائِيَّةِ ثَلَاثُ مِئَةٍ وَخَمْسَةٌ وَسِتُّونَ يَوْمًا وَخَمْسٌ وَعِشْرُونَ دَقِيقَةً. يُحَوَّلُ الجُزْءُ الكَسْرِيُّ إِلَى أَعْدَادٍ صَحِيحَةٍ بِإِيجَادِ مَقَامٍ مُشْتَرَكٍ.

3. أَعْدَادُ العَبُورِ [通数] [illegible] وَهِيَ الأَعْدَادُ الَّتِي لِكُلٍّ مِنْهَا بَسْطٌ وَمَقَامٌ. يُضَارَعُ البَسْطُ فِي المَقَامِ لِيُعْطِيَ أَعْدَادًا صَحِيحَةً بِمَقَامٍ مُشْتَرَكٍ.

4. أَعْدَادُ الإِعَادَةِ [复数] [illegible] وَهِيَ التِّي تَنْتَهِي بِعَشَرَاتٍ أَو مِئَاتٍ أَو أُلُوفٍ. تَحْتَاجُ إِلَى تَخْفِيضٍ خَاصٍّ لِاسْتِرْجَاعِ الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ.

4.3 Finding the Definitive Numbers (求定数)

اسْتِخْرَاجُ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ

元数者：先以两两连环求等，约奇弗约偶。或约得五而彼有十，乃约偶弗约奇。或元数俱偶，约毕可存一位见偶。或皆约而犹有类数存，姑置之，俟与其他约遍而后乃与姑置者求等约之。或诸数皆不可尽类，则以诸元数命曰定数，以复数格入之。

收数者：乃命尾位分厘作单零，以进所问之数，定位讫，用元数格入之。或如意立数为母，收进分厘以从所问，用通数格入之。

通数者：置问数通分纳子，互乘之，皆曰通数。求总等，不约一位，约众位，得各原法数，用元数格入之。或诸母数繁，就分从省通之者，皆不用元，各母仍求总等，存一位约众位，亦各得原法数，亦用元法数格入之。

复数者：问数尾位见十以上者，以诸数求总等，存一位约众位，始得元数。两两连环求等，约奇弗约偶，复乘偶；或约偶弗约奇，弗乘奇。

أَمَّا الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ: أَوَّلاً طَلَبُ المُشْتَرَكِ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَةِ ثُنَائِيًا، فَتُخَفَّضُ الفَرْدِيَّةُ لاَ الزَّوْجِيَّةُ. إِنْ خُفِّضَتْ إِلَى خَمْسَةٍ وَكَانَتْ هُنَاكَ عَشَرَةٌ، فَخَفِّضِ الزَّوْجِيَّ لاَ الفَرْدِيَّ. إِنْ كَانَتِ الأَعْدَادُ الأَصْلِيَّةُ كُلُّهَا زَوْجِيَّةً، فَبَعْدَ التَّخْفِيضِ يُمْكِنُ الإِبْقَاءُ عَلَى مَوْضِعٍ وَاحِدٍ زَوْجِيٍّ.

وَأَمَّا أَعْدَادُ الجَمْعِ: فَأَمْرُ نِهَايَةِ الأَجْزَاءِ مِنَ العُشْرَةِ أَو المِئَةِ أَنْ تُجْعَلَ صِفْرًا وَاحِدًا، فَيَتَقَدَّمُ عَدَدُ المَسْأَلَةِ.

وَأَمَّا أَعْدَادُ العَبُورِ: ضَعْ أَعْدَادَ المَسَائِلِ فَأَجْرِ عَلَيْهَا عَمَلِيَّةَ جَمْعِ البَسْطِ فِي المَقَامِ، ثُمَّ اِضْرِبْهَا بَعْضَهَا فِي بَعْضٍ، فَكُلُّهَا تُسَمَّى أَعْدَادَ العَبُورِ.

وَأَمَّا أَعْدَادُ الإِعَادَةِ: فَالمَسَائِلُ الَّتِي تَنْتَهِي بِعَشَرَاتٍ فَصَاعِدًا، نَطْلُبُ المُشْتَرَكَ الأَعْظَمَ لِجَمِيعِ الأَعْدَادِ، فَنُبْقِي مَوْضِعًا وَاحِدًا وَنُخَفِّضُ البَاقِيَ، فَنَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ.

4.4 Computing the Derivative Numbers (求衍数、奇数、乘率、用数)

اسْتِخْرَاجُ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ وَالفَرْدِيَّاتِ وَمُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ وَالأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ

求定数勿使两位见偶，勿使见一太多。见一多则借用繁，不欲借则任得一。

以定相乘为衍母，以各定约衍母，得各衍数。或列各定数于右行，各立天元一为子于左行，以母互乘子，亦得衍数。

次以各定母满去衍数，各余名曰奇数。

用大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求数。

فِي اسْتِخْرَاجِ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ: لاَ تَجْعَلْ مَوْضِعَيْنِ زَوْجِيَّيْنِ، وَلاَ تَجْعَلِ الوَاحِدَ كَثِيرًا. فَإِنْ كَثُرَتِ الأَوَاحِدُ تَعَقَّدَتِ العَمَلِيَّةُ.

يُضَرَّبُ المُثَبَّتُ فِي بَعْضِهِ لِيُعْطِيَ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ [衍母]. ثُمَّ يُقَسَّمُ كُلُّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ. أَوْ: ضَعِ المُثَبَّتَاتِ فِي الصَّفِّ الأَيْمَنِ، وَضَعِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ، ثُمَّ اِضْرَبِ البِسَاطَ بَعْضُهُ فِي بَعْضٍ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ.

ثُمَّ تُمْلَأُ كُلُّ مُثَبَّتَاتٍ مِنَ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ، فَيَتَبَقَّى لِكُلِّ وَاحِدٍ عَدَدٌ يُسَمَّى العَدَدَ الفَرْدِيَّ [奇数].

ثُمَّ تُدْخَلُ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، فَنَحْصُلُ
عَلَى مُعَدِّلِ الضَّرْبِ. يُضَرَّبُ فِي العَدَدِ المُشْتَقِّ فَيَكُونُ عَدَدًا مُسْتَخْدَمًا.
ثُمَّ تُوضَعُ كُلُّ البَوَاقِي فَتُضَرَّبُ فِي الأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ، فَتُجْمَعُ
فَتَكُونُ جُمْلَةً. يُزَالُ مِنْهَا الجِذْرُ المُشْتَرَكُ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَطْلُوبُ.

[illegible]:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

بِالرَّمْزِ الرِّيَاضِيِّ الحَدِيثِ، تَحُلُّ طَرِيقَةُ جَمْعِ الأَعْدَادِ العُظْمَى النِّظَامَ التَّالِيَ:

[illegible]:

[illegible] .1 **求定数** [illegible]: [illegible] m_i [illegible].

[illegible] .2 **求衍母** [illegible]: $M = \prod m_i$

[illegible] .3 **求衍数** [illegible]: $M_i = M/m_i$

[illegible] .4 **求奇数** [illegible]: $g_i = M_i \bmod m_i$

[illegible] .5 **大衍求一** [illegible]: [illegible] k_i [illegible] $k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

[illegible] .6 **求用数** [illegible]: $u_i = k_i \cdot M_i$

[illegible] .7 **求总数** [illegible]: $N = \sum r_i \cdot u_i \pmod{M}$

1. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ [illegible]数定求]: تَخْفِيضُ m_i ثُنَائِيًّا بِأَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ حَتَّى تَصِيرَ مُتَبَادِلِيَّةَ القَاسِمِ الأَعْظَمِ.

2. خُطْوَةُ: طَلَبُ الجِذْرِ المُشْتَرَكِ [illegible]母衍求]: $M = \prod m_i$

3. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ [illegible]数衍求]: $M_i = M/m_i$

4. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ الفَرْدِيَّةِ [illegible]数奇求]: $g_i = M_i \bmod m_i$

5. خُطْوَةُ: طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ [illegible]大衍求一术]: إِيجَادُ k_i حَيْثُ $k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$

6. خُطْوَةُ: طَلَبُ الأَعْدَادِ المُسْتَخْدَمَةِ [illegible]数用求]: $u_i = k_i \cdot M_i$

7. خُطْوَةُ: الحِسَابُ النِّهَائِيُّ [illegible]数总求]: $N = \sum r_i \cdot u_i \pmod{M}$

4.5 The Dayan Method for Finding Unity (大衍求一术)

طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لِاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ

大衍求一术云：置奇右上，定居右下。立天元一于左上。先以右行上下两位，以少除多，所得商数，乃递互乘归左行。须使右上末后奇一而止。乃验左上所得，以为乘率。或奇数已见单一者，便为乘率。

[illegible]: [illegible] a [illegible] m [illegible], [illegible] k [illegible]:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

[illegible] a [illegible] m, [illegible] [illegible].

تَقُولُ طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لِاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ: ضَعِ العَدَدَ الفَرْدِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتَ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ. أَقِمِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. أَوَّلاً خُذِ الصَّفَّ الأَيْمَنَ الأَعْلَى وَالأَسْفَلَ، فَاقْسِمِ الأَكْبَرَ عَلَى الأَصْغَرِ، فَيَكُونُ النَّاتِجُ هُوَ عَدَدَ القِسْمَةِ. ثُمَّ اِضْرِبْهُ عَلَى التَّبَادُلِ فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ. يَنْبَغِي أَنْ يَكُونَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ وَاحِدًا. ثُمَّ تَحَقَّقْ مِمَّا حَصَلْتَ عَلَيْهِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ فَيَكُونُ مُعَدِّلَ الضَّرْبِ.

بِالأَلْفَاظِ العَصْرِيَّةِ: بِنَاءً عَلَى عَدَدَيْنِ مُتَبَادِلِيَّ القَاسِمِ الأَعْظَمِ a [illegible]العَدَدُ الفَرْدِيُّ[illegible] وَm [illegible]العَدَدُ المُثَبَّتُ[illegible]، نَجِدُ k حَيْثُ:

$$k \cdot a \equiv 1 \pmod{m}$$

هَذَا هُوَ الضِّدُّ الضَّرْبِيُّ التُّمُودِجِيُّ لِلعَدَدِ a حَسَبَ الوَحْدَةِ m.

按： 按求一术之精妙，在于不用互乘相减之繁，而直以递除递乘得之。其法以奇居右上，定居右下，天元一居左上。以右下除右上，得商数，以商数乘左上，归入左下。复以右上之余除右下，得商数，以商数乘左下，归入左上。如此上下递除，左右递乘，必使右上余一而止。此时左上所得，即为乘率。若左上所得甚大，满定母去之，不满者方为正乘率。

此术实为今之连分数求渐近分数之法，亦即欧几里得辗转相除之推广。泰西所谓扩展欧几里得算法，其源实在于此。秦氏独得于心，不藉师传，可谓神矣。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ: إِنَّ دِقَّةَ طَرِيقَةِ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ تَكْمُنُ فِي عَدَمِ الحَاجَةِ إِلَى التَّبَادُلِ المُرَكَّبِ لِلطَّرْحِ، بَلْ بِالقِسْمَةِ المُتَعَاقِبَةِ وَالضَّرْبِ

المُبَاشِرِ. طَرِيقَتُهَا: ضَعِ العَدَدَ الفَرْدِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتَ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، وَالوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ.

اقْسِمِ الأَعْلَى الأَيْمَنَ عَلَى الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ فَتَحْصُلُ عَلَى نَاتِجِ القِسْمَةِ. اِضْرَبْ نَاتِجَ القِسْمَةِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ فَتُدْخَلُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْسَرِ. ثُمَّ اِقْسِمِ البَاقِيَ الأَعْلَى الأَيْمَنَ عَلَى الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، فَيَكُونُ نَاتِجُ القِسْمَةِ، فَتَضْرُبَهُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْسَرِ فَتُدْخَلَ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. وَهَكَذَا تَتَعَاقَبُ القِسَمَاتُ عَلَى الأَعْلَى وَالأَسْفَلِ، وَالضَّرْبُ عَلَى الأَيْمَنِ وَالأَيْسَرِ، حَتَّى يَكُونَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ وَاحِدًا.

فَمَا يُحْصَلُ عَلَيْهِ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ هُوَ مُعَدِّلُ الضَّرْبِ. إِنْ كَانَ كَبِيرًا جِدًّا فَأَزِلِ المُثَبَّتَ مِنْهُ، فَمَا لَمْ يُمْلَأْ هُوَ مُعَدِّلُ الضَّرْبِ الصَّحِيحُ.

هَذِهِ الطَّرِيقَةُ هِيَ فِي الحَقِيقَةِ طَرِيقَةُ الكُسُورِ المُتَّصِلَةِ لِإِيجَادِ الكُسُورِ المُتَقَرِّبَةِ، أَيْ أَنَّهَا تَعْمِيمٌ لِعَمَلِيَّةِ اقْتِسَامِ أُقْلِيدُسَ المُتَبَادَلِ. إِنَّ مَا يُسَمَّى فِي العَالَمِ الغَرْبِيِّ بِخَوَارِزْمِيَّةِ أُقْلِيدُسَ المُمَدَّدَةِ، أَصْلُهَا فِي الحَقِيقَةِ مِنْ هُنَا. إِنَّ قِين جِيُوشَاو قَدِ اِكْتَشَفَهَا بِنَفْسِهِ دُونَ مُعَلِّمٍ، فَيُمْكِنُ أَنْ تُوصَفَ بِأَنَّهَا إِلٰهِيَّةٌ.

5 Problem 1: Shigua Fawei (蓍卦发微)

المَسْأَلَةُ الأُولَى: كَشْفُ أَسْرَارِ الكَشْفِ بِعِيدَانِ الأَرِيكَةِ

问曰:

《易》曰：大衍之数五十，其用四十有九。又曰：分而为二以象两，挂一以象三，揲之以四以象四时，归奇于扐以象闰。五岁再闰，故再扐而后挂。三变而成爻，十有八变而成卦。欲知所衍之术及其数各几何？

[illegible]

المسألة:

يَقُولُ كِتَابُ التَّغَيُّرَاتِ: [illegible]عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمُسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ.[illegible] وَيَقُولُ أَيْضًا: [illegible]اِقْسِمِ العَدَدَ نِصْفَيْنِ لِتُمَثِّلَ السَّمَاءَ وَالأَرْضَ، وَعَلِّقْ وَاحِدًا لِتُمَثِّلَ الثَّلَاثَةَ [illegible]السَّمَاءَ وَالأَرْضَ وَالإِنْسَانَ[illegible]، وَاِعْدُدْ بِأَرْبَعَةٍ لِتُمَثِّلَ الفُصُولَ الأَرْبَعَةَ، وَأَرْجِعِ البَاقِيَ لِيُمَثِّلَ الشَّهْرَ الكَبِيسَ.[illegible] ثَلَاثُ تَغَيُّرَاتٍ تُنْتِجُ خَطًّا، وَثَمَانِيَ عَشْرَةَ تَغَيُّرَةً تُنْتِجُ شَكْلًا سِدَاسِيًّا.

المَطْلُوبُ: مَا هِيَ طَرِيقَةُ الحِسَابِ وَعَدَدُ كُلٍّ وَاحِدٍ؟

答曰:

衍母十二，衍法三。

一元衍数二十四，二元衍数一十二，三元衍数八，四元衍数六。以上四位衍数，计五十一。

一揲用数一十二，二揲用数二十四，三揲用数四，四揲用数九。以上四位用数，计四十九。

الجواب:

الجِذْرُ المُشْتَرَكُ [illegible]衍母[illegible] هُوَ اثْنَا عَشَرَ، وَقَاعِدَةُ الاِشْتِقَاقِ ثَلَاثَةٌ.

عَدَدُ الوَحْدَةِ الأُولَى المُشْتَقَّ 24، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الثَّانِيَةِ المُشْتَقَّ 12، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الثَّالِثَةِ المُشْتَقَّ 8، وَعَدَدُ الوَحْدَةِ الرَّابِعَةِ المُشْتَقَّ 6. مَجْمُوعُ هَذِهِ الأَرْبَعَةِ أَعْدَادٍ مُشْتَقَّةٍ هُوَ 51.

عَدَدُ الاِسْتِخْدَامِ لِلْقَسْمَةِ الأُولَى: 12، وَلِلثَّانِيَةِ: 24، وَلِلثَّالِثَةِ: 4، وَلِلرَّابِعَةِ: 9. مَجْمُوعُ هَذِهِ الأَرْبَعَةِ أَعْدَادِ اسْتِخْدَامٍ هُوَ 49.

هَذَا هُوَ مَعْنَى قَوْلِهِمْ: [illegible]عَدَدُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى خَمْسُونَ، وَالمُسْتَخْدَمُ مِنْهَا تِسْعَةٌ وَأَرْبَعُونَ.[illegible]

术曰:

置诸元数，两两连环求等，约奇弗约偶。遍约毕，乃变元数皆曰定母，列右行。各立天元一为子，列左行。以诸定母互乘左行之子，各得名曰衍数。

次以各定母满去衍数，各余名曰奇数。以奇数与定母用大衍术求一，得各乘率。以乘衍数，各得用数。

验次所揲余几何，以其余数乘诸用数，并之，名曰总数。满衍母去之，不满为所求数。以为实，易以三才为衍法，以法除实所得为象数。如实有余，或一或二，皆命作一，同为象数。

其象数得一为老阳，得二为少阴，得三为少阳，得四为老阴。得老阳画重爻，得少阴画拆爻，得少阳画单爻，得老阴画交爻。凡六画乃成卦。

الطريقة:

ضَعْ جَمِيعَ الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ ثُنَائِيًّا، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ. إِذَا اِنْتَهَى التَّخْفِيضُ، فَحَوِّلِ الأَعْدَادَ الأَصْلِيَّةَ كُلَّهَا إِلَى أَعْدَادٍ مُثَبَّتَةٍ 母定 فِي الصَّفِّ الأَيْمَنِ. أَقِمِ الوَاحِدَ السَّمَاوِيَّ فَرْدًا فِي الصَّفِّ الأَيْسَرِ. ثُمَّ اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ بَعْضُهَا فِي بَعْضٍ فِي أَبْنَاءِ الصَّفِّ الأَيْسَرِ، فَيُسَمَّى كُلٌّ مِنْهَا عَدَدًا مُشْتَقًّا 衍数.

ثُمَّ أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ، فَيَتَبَقَّى لِكُلِّ عَدَدٍ يُسَمَّى العَدَدَ الفَرْدِيَّ 奇数. بِالعَدَدِ الفَرْدِيِّ وَالمُثَبَّتِ، أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ، فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَحْصُلُ عَلَى أَعْدَادِ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ كُلَّ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ، فَتُجْمَعُ فَتُسَمَّى جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ مِنْهَا، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَطْلُوبُ.

عَدَدُ الصُّوْرَةِ: إِذَا حَصَلْتَ عَلَى الوَاحِدِ فَهُوَ اليَنَانِيُّ الأَكْبَرُ 阳老، وَالاِثْنَانِ هِيَ اليِنَانِيَّةُ الأَصْغَرُ 阴少، وَالثَّلَاثَةُ هُوَ اليَنَانِيُّ الأَصْغَرُ 阳少، وَالأَرْبَعَةُ هِيَ اليِنَانِيَّةُ الأَكْبَرُ 阴老. سِتَّةُ خُطُوطٍ تُكَوِّنُ شَكْلًا سِدَاسِيًّا.

6 Problem 2: Guli Huiji (古历会积)

المَسْأَلَةُ الثَّانِيَةُ: تَرَاكُمُ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ

问曰:

问古历会积，欲求积年。以历法积元为问，历过无考，但据近世演纪之法，推而上之。

假令治历演纪，上元甲子岁天正冬至十一月甲子日夜半，日月合璧，五星联珠，适为元会。欲求上元积年，其法以岁实、朔策、六十甲子、回归年、交点年诸周期，各以所余分秒推之。今设问数如后：

置岁实三百六十五日二十四刻二十五分（即365.2425日），朔策二十九日五十三刻六分（即29.53059日），甲子周期六十日，欲求积年之元会。

答曰:

答曰：积年九千一百六十四万二千三百七十七年。

上元距治历之年（淳祐七年，1247年），积年若干，以历元法推之，得所求积年。

术曰:

术曰：以大衍求之。置元历相关诸周期，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求积年。

المسألة:

المَسْأَلَةُ فِي تَرَاكُمِ التَّقْوِيمِ القَدِيمِ، نُرِيدُ إِيجَادَ السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ.

نَأْخُذُ تَرَاكُمَ الدَّوْرَاتِ التَّقْوِيمِيَّةِ كَمَسْأَلَةٍ، وَالتَّقْوِيمُ السَّابِقُ لَيْسَ مَحْفُوظًا، لَكِنَّنَا نَسْتَنْبِطُهُ بِنَاءً عَلَى أُسْلُوبِ العُصُورِ الحَدِيثَةِ.

لِنَفْرِضْ أَنَّنَا نُعِدُّ التَّقْوِيمَ، فَإِنَّ لَحْظَةَ البِدَايَةِ [元上] فِي سَنَةِ جَا تْز [甲子] هِيَ لَحْظَةُ انْقِلَابِ الشِّتَاءِ فِي شَهْرِ تَشْرِينَ الثَّانِي [تِشْرِينَ الثَّانِي] عِنْدَ نِصْفِ اللَّيْلِ، حِينَ يَتَحَدَّدُ القَمَرُ وَالشَّمْسُ، وَيَتَصَافُّ الكَوَاكِبُ الخَمْسَةُ، وَهَذِهِ هِيَ اللَّحْظَةُ البَدَائِيَّةُ.

نُرِيدُ إِيجَادَ السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ مِنَ البِدَايَةِ. الطَّرِيقَةُ: بِالسَّنَةِ الشَّمْسِيَّةِ، وَشَهْرِ القَمَرِ، وَدَوْرَةِ السِّتِّينَ جَا تْز، وَالسَّنَةِ الاستوائيَّةِ، وَسَنَةِ التَّقَاطُعِ.

نَضَعُ السَّنَةَ الشَّمْسِيَّةَ: 365 يَوْمًا وَ2425 جُزْءًا [أَيْ 365.2425 يَوْمًا]، وَشَهْرَ القَمَرِ: 29 يَوْمًا وَ53059 جُزْءًا [أَيْ 29.53059 يَوْمًا]، وَدَوْرَةَ جَا تْز: 60 يَوْمًا. نُرِيدُ إِيجَادَ تَرَاكُمِ السِّنِينَ.

الجواب:

الجَوَابُ: السِّنُونَ المُتَرَاكِمَةُ هِيَ 91,642,377 سَنَةً.

المُدَّةُ مِن لَحْظَةِ البِدَايَةِ إِلَى سَنَةِ إِعْدَادِ التَّقْوِيمِ [السَّنَةُ السَّابِعَةُ مِن عَهْدِ شُونْيُو، 1247 م] تُحْسَبُ بِطَرِيقَةِ مِيلَادِ التَّقْوِيمِ فَنَحْصُلُ عَلَى السِّنِينَ المُتَرَاكِمَةِ.

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ دَوْرَاتِ التَّقْوِيمِ المُتَعَلِّقَةِ بِالأَصْلِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ، فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ

المُشْتَرَكَ.

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَكُونُ الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ.

اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ السِّنُونُ المُتَرَاكِمَةُ المَطْلُوبَةُ.

7 Problem 3: Tuiji Tugong (推计土功)

المَسْأَلَةُ الثَّالِثَةُ: تَقْدِيرُ أَعْمَالِ التُّرَابِ

问曰:

问：四县（甲、乙、丙、丁）共同筑堤，根据各县的物力分配筑堤任务。

- 甲县物力：138,600 贯
- 乙县物力：146,300 贯
- 丙县物力：192,500 贯
- 丁县物力：184,800 贯

筑堤标准：每 770 贯物力分配一名劳动力，每人每天筑堤 60 平方尺。

进度情况：甲县和乙县已完成任务，丙县剩余 51 丈，丁县剩余 18 丈。

又知四县所筑堤段，皆取土方于近处。甲县取土处距堤 120 步，乙县 80 步，丙县 60 步，丁县 40 步。每夫日运土 90 尺，行 60 步。

欲求堤的总长度以及各县所筑长度各几何?

المسألة:

المَسْأَلَةُ: أَرْبَعُ مُدُنٍ [أَلِف، بَاء، جِيم، دَال] تَبْنِي سَدًّا مَشْتَرَكًا، وَتُوَزَّعُ المَهَامُّ حَسَبَ المَوَادِّ المَادِّيَّةِ لِكُلِّ مَدِينَةٍ.

- مَوَادُّ مَدِينَةِ أَلِف: 138,600 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ بَاء: 146,300 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ جِيم: 192,500 سِلْسِلَةً
- مَوَادُّ مَدِينَةِ دَال: 184,800 سِلْسِلَةً

مِعْيَارُ بِنَاءِ السَّدِّ: كُلُّ 770 سِلْسِلَةً مِنَ المَوَادِّ تُخَصَّصُ لِعَامِلٍ وَاحِدٍ، وَكُلُّ عَامِلٍ يَبْنِي 60 قَدَمًا مُرَبَّعَةً يَوْمِيًّا.

حَالَةُ التَّقَدُّمِ: أَكْمَلَتْ مَدِينَتَا أَلِف وَبَاء مُهِمَّتَهُمَا، وَبَقِيَتْ لِمَدِينَةِ جِيم 51 ذِرَاعٍ، وَلِمَدِينَةِ دَال 18 ذِرَاعًا.

وَقَدْ عُلِمَ أَنَّ كُلَّ المُدُنِ تَأْخُذُ التُّرَابَ مِنْ مَكَانٍ قَرِيبٍ: مَدِينَةُ أَلِف عَلَى بُعْدِ 120 خُطْوَةٍ، وَبَاء 80 خُطْوَةً، وَجِيم 60 خُطْوَةً، وَدَال 40 خُطْوَةً. كُلُّ عَامِلٍ يَنْقُلُ 90 قَدَمًا يَوْمِيًّا عَلَى بُعْدِ 60 خُطْوَةٍ.

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ الطُّولُ الإِجْمَالِيُّ لِلسَّدِّ وَطُولُ كُلِّ مَدِينَةٍ؟

答曰:

答曰：堤的总长度为 19 里 235 步 5 尺。

各县所筑长度：

- 甲县：7 里 280 步（计 1,260 丈）
- 乙县：5 里 120 步 5 尺 6 寸
- 丙县：4 里 328 步 5 尺 6 寸
- 丁县：与前三县相应，合总 19 里 235 步 5 尺

术曰:

术曰：以大衍求之。置各县物力，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各县余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求堤长。

الجواب:

الجَوَابُ: الطُّولُ الإِجْمَالِيُّ لِلسَّدِّ هُوَ 19 لِيٍّ وَ235 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ.

طُولُ كُلِّ مَدِينَةٍ:

- مَدِينَةُ أَلِف: 7 لِيٍّ وَ280 خُطْوَةً [أَيْ 1,260 ذِرَاعًا]
- مَدِينَةُ بَاء: 5 أَلْيَانٍ وَ120 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ وَ6 أَنْمَاطٍ
- مَدِينَةُ جِيم: 4 أَلْيَانٍ وَ328 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ وَ6 أَنْمَاطٍ
- مَدِينَةُ دَال: تُنَاسِبُ الثَّلَاثَ المُدُنِ الأُخْرَى، وَالمَجْمُوعُ 19 لِيًّا وَ235 خُطْوَةً وَ5 أَقْدَامٍ

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَوَادَّ كُلِّ مَدِينَةٍ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ.

أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ.

اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ بَوَاقِي كُلِّ مَدِينَةٍ فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ طُولُ السَّدِّ المَطْلُوبُ.

8 Problem 4: Tuiku E Qian (推库额钱)

المَسْأَلَةُ الرَّابِعَةُ: حِسَابُ أَمْوَالِ الخَزِينَةِ

问曰:

问有外邑七库，日纳息足钱适等，递年成贯整纳。近缘见钱希少，听各库照当处市陌准解旧会。

其甲库有零钱一十文，丁、庚二库各零四文，戊库零六文，余库无零钱。甲库所在市陌一十二文，递减一文至庚库而止。

欲求诸库日息原纳足钱、展省及今纳旧会，并大小月分各几何?

المسألة:

المَسْأَلَةُ فِي سَبْعِ خَزَائِنَ فِي مُدُنٍ خَارِجِيَّةٍ، كُلُّهَا تَجْمَعُ فَوَائِدَ يَوْمِيَّةً بِالعُمْلَةِ الكَامِلَةِ بِنَفْسِ المِقْدَارِ. فِي السِّنِينِ المُتَعَاقِبَةِ تُدْفَعُ مِنْ غَيْرِ كَسْرٍ. وَلأَنَّ العُمْلَةَ المُتَدَاوَلَةَ قَلِيلَةٌ حَالِيًّا، فَأُذِنَ لِكُلِّ خَزِينَةٍ أَنْ تُبَدِّلَ عُمْلَتَهَا حَسَبَ سِعْرِ السُّوقِ المَحَلِّيِّ.

خَزِينَةُ أَلِف لَهَا فُلُوسٌ مُتَبَقِّيَةٌ عَشْرَةٌ، وَخَزِينَتَا دَال وَجِيم لِكُلٍّ مِنْهُمَا أَرْبَعَةٌ، وَخَزِينَةُ وَاو سِتَّةٌ، وَالبَاقِي لاَ يَتَبَقَّى لَهَا شَيْءٌ. سِعْرُ السُّوقِ فِي مَوْضِعِ خَزِينَةِ أَلِف اثْنَا عَشَرَ نُصْفًا، يَنْقُصُ نُصْفًا وَاحِدًا حَتَّى خَزِينَةِ جِيم.

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ المِقْدَارُ الأَصْلِيُّ لِلْفَوَائِدِ اليَوْمِيَّةِ، وَالْمُحَوَّلُ، وَمَا يُدْفَعُ اليَوْمَ مِنَ الأَوْرَاقِ القدِيمَةِ؟

答曰:

答曰：诸库纳日息足钱二十贯九百五十文。

展省三十五贯文。

各库旧会：

- 甲库日息旧会：二百二十四贯五百一十文
- 乙库日息旧会：二百四十五贯文
- 丙库日息旧会：二百六十九贯五百文
- 丁库日息旧会：二百九十九贯四百四十文
- 戊库日息旧会：三百三十六贯七百五十文
- 己库日息旧会：三百八十五贯文
- 庚库日息旧会：四百四十九贯一百文

الجواب:

الجَوَابُ: فَوَائِدُ كُلِّ الخَزَائِنِ اليَوْمِيَّةُ بِالعُمْلَةِ الكَامِلَةِ هِيَ 20 سِلْسِلَةً وَ950 نُصْفًا.

المُحَوَّلُ: 35 سِلْسِلَةً.

أَوْرَاقُ كُلِّ خَزِينَةٍ القدِيمَةُ:

- خَزِينَةُ أَلِف: 224 سِلْسِلَةً وَ510 نُصْفًا
- خَزِينَةُ بَاء: 245 سِلْسِلَةً
- خَزِينَةُ جِيم: 269 سِلْسِلَةً وَ500 نُصْفًا
- خَزِينَةُ دَال: 299 سِلْسِلَةً وَ440 نُصْفًا
- خَزِينَةُ وَاو: 336 سِلْسِلَةً وَ750 نِصْفًا

- خَزِينَةُ هَاء: 385 سِلْسِلَةً
- خَزِينَةُ جِيم: 449 سِلْسِلَةً وَ100 نُصْفًا

9 Problem 5: Fentiao Tuiyuan (分粜推原)

المَسْأَلَةُ الخَامِسَةُ: تَوْزِيعُ الحُبُوبِ

问曰:
有兄弟三人，各将收获之米送往不同的地方：

- 甲将米送往官场粜卖，用官斛量之，余 3 斗 2 升
- 乙将米送往安吉乡粜卖，用安吉斛量之，余 7 斗
- 丙将米送往平江粜卖，用平江斛量之，余 3 斗

官斛每石八斗三升，安吉斛每石一石一斗，平江斛每石一石三斗五升。三人各不知米数，但知其共余之数。欲求三人共收获米数以及各自分米数几何？

المسألة:
هُنَاكَ ثَلَاثَةُ إِخْوَةٍ، كُلٌّ مِنْهُمْ يُرْسِلُ أَرُزَّهُ المَحْصُودَ إِلَى مَكَانٍ مُخْتَلِفٍ:

- يُرْسِلُ أَلِف أَرُزَّهُ إِلَى السُّوقِ الرَّسْمِيَّةِ لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِالكَيْلِ الرَّسْمِيِّ يَتَبَقَّى 3 أَرْتَالٍ وَ2 لِتْرَيْنِ
- يُرْسِلُ بَاء أَرُزَّهُ إِلَى سُوقِ أَنْجِي لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِكَيْلِ أَنْجِي يَتَبَقَّى 7 أَرْتَالٍ
- يُرْسِلُ جِيم أَرُزَّهُ إِلَى سُوقِ بِنْجْيَانْج لِبَيْعِهِ، فَإِذَا قِيسَ بِكَيْلِ بِنْجْيَانْج يَتَبَقَّى 3 أَرْتَالٍ

الكَيْلُ الرَّسْمِيُّ لِكُلِّ شِيكَارٍ 8 أَرْتَالٍ وَ3 لِتْرَاتٍ، وَكَيْلُ أَنْجِي لِكُلِّ شِيكَارٍ 11 أَرْتَالًا، وَكَيْلُ بِنْجْيَانْج لِكُلِّ شِيكَارٍ 13 أَرْتَالًا وَ5 لِتْرَاتٍ. كُلٌّ مِنَ الثَّلَاثَةِ لاَ يَعْرِفُ كَمِّيَّةَ أَرُزِّهِ، لَكِنَّهُ يَعْرِفُ البَاقِيَ.
المَطْلُوبُ: كَمِّيَّةُ الأَرُزِّ المَحْصُودَةِ المُشْتَرَكَةِ وَنَصِيبُ كُلِّ وَاحِدٍ؟

答曰:
答曰：三人共收获米 738 石。
各分米数：

- 甲：296 石，粜去 295 石余 3 斗 2 升
- 乙：223 石，粜去 222 石余 7 斗
- 丙：182 石，粜去 181 石余 3 斗

分米总数为 738 石。以三人各分之，各得 246 石为本分。以各斛量之，余数不同，乃以分米粜之，余数如题。

الجواب:
الجَوَابُ: مَجْمُوعُ الأَرُزِّ المَحْصُودِ 738 شِيكَارًا.
نَصِيبُ كُلِّ وَاحِدٍ:

- أَلِف: 296 شِيكَارًا، بَاعَ 295 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 3 أَرْطَالٌ وَ2 لِتْرَانِ
- بَاء: 223 شِيكَارًا، بَاعَ 222 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 7 أَرْطَالٍ

术曰:

术曰：以大衍求之。置各斛率（单位：升）：官斛 83 升，安吉斛 110 升，平江斛 135 升。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求分米率数。以三人因之，得共米数。

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَعَايِيرَ كُلِّ كَيْلٍ بِوَحْدَةِ اللِّتْرِ: الكَيْلُ الرَّسْمِيُّ 83 لِتْرًا، وَكَيْلُ أَنْجِي 110 لِتْرَاتٍ، وَكَيْلُ بِنْجْيَانْج 135 لِتْرًا. اِطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ عَدَدُ تَقْسِيمِ الأَرُزِّ المَطْلُوبُ. اِضْرَبْهُ فِي ثَلَاثَةٍ فَتَحْصُلُ عَلَى مَجْمُوعِ الأَرُزِّ.

- جِيم: 182 شِيكَارًا، بَاعَ 181 شِيكَارًا وَبَقِيَتْ 3 أَرْطَالٌ

مَجْمُوعُ الأَرُزِّ المُقَسَّمِ هُوَ 738 شِيكَارًا. إِذَا اِقْتَسَمَهَا الثَّلاثَةُ، فَكُلٌّ مِنْهُمْ يَحْصُلُ عَلَى 246 شِيكَارًا كَنَصِيبٍ أَصْلِيٍّ.

10 Problem 6: Chengxing Jidi (程行计地)

المَسْأَلَةُ السَّادِسَةُ: حِسَابُ مَسَافَةِ الرِّحْلَةِ

问曰:

军师派遣三名急足（甲、乙、丙）分别前往都下报捷。

- 甲每天行 300 里
- 乙每天行 240 里
- 丙每天行 180 里

甲提前数日申未到，乙后数日未正到，丙今日辰末到。

欲知从军前到都下的距离以及三人各自行走的天数几何?

المسألة:

يُرْسِلُ القَائِدُ العَسْكَرِيُّ ثَلَاثَةَ سُعَاةٍ [أَلِف، بَاء، جِيم] إِلَى العَاصِمَةِ لِنَشْرِ أَخْبَارِ النَّصْرِ.

- أَلِف يَمْشِي 300 لِيًا يَوْمِيًّا
- بَاء يَمْشِي 240 لِيًا يَوْمِيًّا
- جِيم يَمْشِي 180 لِيًا يَوْمِيًّا

أَلِف وَصَلَ قَبْلَ بِضْعَةِ أَيَّامٍ، وَبَاء وَصَلَ بَعْدَهُ بِأَيَّامٍ، وَجِيم وَصَلَ اليَوْمَ.

المَطْلُوبُ: مَا هِيَ المَسَافَةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ، وَكَمْ يَوْمًا مَشَى كُلُّ وَاحِدٍ؟

答曰:

答曰：从军前到都下的距离为 3,300 里。

- 甲行 11 天
- 乙行 13 天 4 时（乙于未正到，后于甲 2 日 4 时）
- 丙行 18 天 2 时（丙于辰末到，后于甲 7 日 2 时）

الجواب:

الجَوَابُ: المَسَافَةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ هِيَ 3,300 لِيًا.

- أَلِف سَارَ 11 يَوْمًا
- بَاء سَارَ 13 يَوْمًا وَ4 سَاعَاتٍ [وَصَلَ بَعْدَ أَلِف بِيَوْمَيْنِ وَ4 سَاعَاتٍ]
- جِيم سَارَ 18 يَوْمًا وَسَاعَتَيْنِ [وَصَلَ بَعْدَ أَلِف بِـ 7 أَيَّامٍ وَسَاعَتَيْنِ]

术曰:

术曰：以大衍求之。置三人日行里数，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍

求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数（时差所当之里数）乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求距离。

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ مَا يَمْشِيهِ الثَّلاثَةُ يَوْمِيًّا مِنَ الأَلْيَانِ، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ.

اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ. قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ. اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي [الَّتِي تُسَاوِي أَلْيَانِ الفَرْقِ الزَّمَانِيِّ] فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ المَسَافَةُ المَطْلُوبَةُ.

11 Problem 7: Chengxing Xiangji (程行相及)

المَسْأَلَةُ السَّابِعَةُ: التَّقَابُلُ فِي الرِّحْلَةِ

问曰:

问：甲、乙、丙三人同行赴都。甲日行 80 里，乙日行 70 里，丙日行 60 里。甲先至某驿，留停若干日，然后复行；乙后甲一日而发，丙又后乙一日而发。甲留停之日，恰等于乙丙后发之日数。三人适同时至都。

欲求军前至都之总里数，及甲留停之日数、乙丙后发之日数各几何？又三人各行之日数及所过驿数各几何？

المسألة:

المَسْأَلَةُ: أَلِف وَبَاء وَجِيم يُسَافِرُونَ مَعًا إِلَى العَاصِمَةِ. أَلِف يَمْشِي 80 لِيًا يَوْمِيًا، وَبَاء يَمْشِي 70 لِيًا يَوْمِيًا، وَجِيم يَمْشِي 60 لِيًا يَوْمِيًا. يَصِلُ أَلِف أَوَّلًا إِلَى مَحَطَّةٍ مَا، فَيَتَوَقَّفُ أَيَّامًا، ثُمَّ يَسْتَأْنِفُ. يَنْطَلِقُ بَاء بَعْدَ أَلِف بِيَوْمٍ وَاحِدٍ، وَجِيم يَنْطَلِقُ بَعْدَ بَاء بِيَوْمٍ. أَيَّامُ تَوَقُّفِ أَلِف تُسَاوِي عَدَدَ أَيَّامِ تَأَخُّرِ بَاء وَجِيم. يَصِلُ الثَّلَاثَةُ إِلَى العَاصِمَةِ فِي نَفْسِ الوَقْتِ.

المَطْلُوبُ: المَسَافَةُ الإِجْمَالِيَّةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ، وَعَدَدُ أَيَّامِ تَوَقُّفِ أَلِف، وَعَدَدُ أَيَّامِ تَأَخُّرِ بَاء وَجِيم. وَكَمْ يَوْمًا سَارَ كُلُّ وَاحِدٍ؟

答曰:

答曰：军前至都之总里数为 8,400 里。

甲留停之日数为 2 日，乙后发 1 日，丙后发 2 日。

三人各行之日数：

- 甲行 105 日，留停 2 日，共 107 日
- 乙行 120 日，共 120 日
- 丙行 140 日，共 140 日

الجواب:

الجَوَابُ: المَسَافَةُ الإِجْمَالِيَّةُ مِنَ الجَيْشِ إِلَى العَاصِمَةِ هِيَ 8,400 لِيًا.

عَدَدُ أَيَّامِ تَوَقُّفِ أَلِف يَوْمَانِ، وَبَاء تَأَخَّرَ يَوْمًا وَاحِدًا، وَجِيم تَأَخَّرَ يَوْمَيْنِ.

أَيَّامُ سَيْرِ كُلِّ وَاحِدٍ:

- أَلِف سَارَ 105 أَيَّامٍ، وَتَوَقَّفَ يَوْمَيْنِ، وَالمَجْمُوعُ 107 أَيَّامٍ
- بَاء سَارَ 120 يَوْمًا، وَالمَجْمُوعُ 120 يَوْمًا
- جِيم سَارَ 140 يَوْمًا، وَالمَجْمُوعُ 140 يَوْمًا

12 Problem 8: Jichi Xunyuan (积尺寻源)

المَسْأَلَةُ الثَّامِنَةُ: اِسْتِقْصَاءُ المَقَادِيرِ مِنَ الحُجْمِ

问曰:

问欲砌基一段，见管大小方砖六门城砖四色。令匠取便，或平或侧，只用一色砖砌，须要适足。匠以砖量地计料，称用：

- 大方：广多六寸，深少六寸
- 小方：广多二寸，深少三寸
- 城砖：长广多三寸，深少一寸
- 六门砖：长广多三寸，深多一寸

皆不合匝，未免修破砖料裨补。其四色砖尺寸：

- 大方：方一尺三寸
- 小方：方一尺一寸
- 城砖：长一尺二寸，阔六寸，厚二寸五分
- 六门砖：长一尺，阔五寸，厚二寸

欲知基深广几何?

المسألة:

يُرِيدُ أَحَدُنَا بِنَاءَ قَاعِدَةٍ، وَلَدَيْهِ أَرْبَعَةُ أَنْوَاعٍ مِنَ الطُّوبِ: طُوبٌ كَبِيرٌ مُرَبَّعٌ، وَطُوبٌ صَغِيرٌ مُرَبَّعٌ، وَطُوبُ سُورِ المَدِينَةِ ذُو سِتَّةِ أَبْوَابٍ، وَطُوبُ أَرْبَعَةِ أَلْوَانٍ. يَأْمُرُ البَنَّاءَ أَنْ يَسْتَخْدِمَ نَوْعًا وَاحِدًا مِنَ الطُّوبِ فَقَطْ، إِمَّا مُسَطَّحًا أَوْ عَلَى جَانِبِهِ، لِيَكُونَ كُلُّ شَيْءٍ مُنَاسِبًا.

حِسَابَاتُ البَنَّاءِ:

- الطُّوبُ الكَبِيرُ: العَرْضُ يَزِيدُ 6 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ 6 أَنْمَاطٍ
- الطُّوبُ الصَّغِيرُ: العَرْضُ يَزِيدُ 2 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ 3 أَنْمَاطٍ
- طُوبُ السُّورِ: الطُّولُ وَالعَرْضُ يَزِيدَانِ 3 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَنْقُصُ نَمَطًا
- طُوبُ الأَبْوَابِ: الطُّولُ وَالعَرْضُ يَزِيدَانِ 3 أَنْمَاطٍ، وَالعُمْقُ يَزِيدُ نَمَطًا

لَمْ يَكُنْ أَيٌّ مِنْهَا مُنَاسِبًا، فَاحْتِيجَ إِلَى كَسْرِ بَعْضِ الطُّوبِ لِلتَّعْدِيلِ.

أَبْعَادُ أَنْوَاعِ الطُّوبِ الأَرْبَعَةِ:

- الطُّوبُ الكَبِيرُ: مُرَبَّعٌ 13 نَمَطًا
- الطُّوبُ الصَّغِيرُ: مُرَبَّعٌ 11 نَمَطًا
- طُوبُ السُّورِ: طُولُ 12 نَمَطٍ، وَعَرْضُ 6 أَنْمَاطٍ، وَسُمْكُ 2.5 نَمَطٍ
- طُوبُ الأَبْوَابِ: طُولُ 10 أَنْمَاطٍ، وَعَرْضُ 5 أَنْمَاطٍ، وَسُمْكُ 2 نَمَطَيْنِ

المَطْلُوبُ: مَا هُوَ عُمْقُ وَعَرْضُ القَاعِدَةِ؟

答曰:
答曰：深三丈七尺一寸，广一丈二尺三寸。
以四色砖量之皆合匝，无修破砖料之弊。

الجواب:
الجَوَابُ: العُمْقُ ثَلَاثَةُ أَرْشٍ وَسَبْعَةُ أَقْدَامٍ وَنَمَطٌ وَاحِدٌ [37.1 قَدَمًا]، وَالعَرْضُ أَرْشٌ وَقَدَمَانِ وَثَلَاثَةُ أَنْمَاطٍ [12.3 قَدَمًا].
بِقِيَاسِ الأَرْبَعَةِ أَنْوَاعِ الطُّوبِ كُلُّهَا مُنَاسِبَةٌ، وَلَيْسَ هُنَاكَ حَاجَةٌ لِكَسْرِ الطُّوبِ.

术曰:
术曰：以大衍求之。置四色砖尺寸及所余尺寸，连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。
次置各余数（广多、深少之数）乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为基之深广。

الطريقة:
الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ أَبْعَادَ أَنْوَاعِ الطُّوبِ الأَرْبَعَةِ وَالبَوَاقِي، وَاطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ.
اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ. قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ. أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أُدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدِّلَاتِ الضَّرْبِ.
ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي [الزِّيَادَةُ فِي العَرْضِ، وَالنُّقْصَانُ فِي العُمْقِ] فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ عُمْقُ وَعَرْضُ القَاعِدَةِ.

13 Problem 9: Yumi Tuishu (余米推数)

المَسْأَلَةُ التَّاسِعَةُ: تَعْيِينُ كَمِّيَّةِ الأَرُزِّ البَاقِيَةِ

问曰:

问：有米不知总数，以三器量之，各余若干。今有米若干石，以甲器量之，每箩三石量之，余二石；以乙器量之，每箩五石量之，余三石；以丙器量之，每箩七石量之，余二石。

欲求米之总数几何？

المسألة:

هُنَاكَ كَمِّيَّةُ أَرُزٍّ لاَ نَعْرِفُ مَجْمُوعَهَا. نَقُومُ بِكَيْلِهَا بِثَلَاثَةِ مَكَايِيلَ، وَلِكُلٍّ بَاقِيَةٌ. نَأْخُذُ الأَرُزَّ فَنَكِيلُهُ بِمِكْيَالِ أَلِف: كُلَّ ثَلَاثَةِ أَشِكَّارٍ يَبْقَى شِيكَارَانِ. وَبِمِكْيَالِ بَاء: كُلَّ خَمْسَةِ أَشِكَّارٍ يَبْقَى ثَلَاثَةٌ. وَبِمِكْيَالِ جِيم: كُلَّ سَبْعَةِ أَشِكَّارٍ يَبْقَى شِيكَارَانِ.

المَطْلُوبُ: كَمِّيَّةُ الأَرُزِّ الإِجْمَالِيَّةُ؟

答曰:

答曰：米总数 23 石。

以三器量之：

- 每箩三石量之，余二石：$23 = 7 \times 3 + 2$
- 每箩五石量之，余三石：$23 = 4 \times 5 + 3$
- 每箩七石量之，余二石：$23 = 3 \times 7 + 2$

皆合题设之数。

الجواب:

الجَوَابُ: مَجْمُوعُ الأَرُزِّ 23 شِيكَارًا.

بِالكَيْلِ بِالثَّلَاثَةِ مَكَايِيلَ:

- كُلَّ ثَلَاثَةِ أَشِكَّارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى شِيكَارَانِ: $23 = 7 \times 3 + 2$
- كُلَّ خَمْسَةِ أَشِكَّارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى ثَلَاثَةٌ: $23 = 4 \times 5 + 3$
- كُلَّ سَبْعَةِ أَشِكَّارٍ نَكِيلُ فَيَبْقَى شِيكَارَانِ: $23 = 3 \times 7 + 2$

كُلُّ ذَلِكَ يُطَابِقُ الأَعْدَادَ المَطْلُوبَةَ فِي المَسْأَلَةِ.

术曰:

术曰：以大衍求之。置各器容量为问数（元数）：三石、五石、七石。连环求等，约奇弗约偶，得定母。诸定相乘为衍母。以各定约衍母得衍数。各满定母去之，余为奇数。大衍求一入之，得乘率。以乘衍数为用数。

次置各余数乘用数，并之为总数。满衍母去之，不满为所求米数。

此问之数，即《孙子算经》所谓□□物不知数□□之问。秦氏大衍术能通其理而广其用，不特三、五、七，即百千万数亦可求之。

الطريقة:

الطَّرِيقَةُ: طَلَبُهَا بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى. ضَعْ سِعَةَ كُلِّ مِكْيَالٍ كَعَدَدٍ لِلمَسْأَلَةِ □العَدَدُ الأَصْلِيُّ□: ثَلَاثَةُ أَشِكَّارٍ، وَخَمْسَةٌ، وَسَبْعَةٌ. اِطْلُبِ المُشْتَرَكَ بِالطَّرِيقَةِ المُتَصِلَّةِ، فَخَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ فَتَحْصُلُ عَلَى

الأَعْدَادِ المُثَبَّتَةِ. اِضْرَبِ المُثَبَّتَاتِ فِي بَعْضِهَا فَتَكُونُ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ.

قَسِّمْ كُلَّ مُثَبَّتٍ عَلَى الجِذْرِ المُشْتَرَكِ فَتَحْصُلُ عَلَى الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ.

أَزِلْ كُلَّ مُثَبَّتٍ مِنْ عَدَدِهِ المُشْتَقِّ فَيَتَبَقَّى العَدَدُ الفَرْدِيُّ. أَدْخُلْ فِي طَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ فَتَحْصُلُ عَلَى مُعَدَّلَاتِ الضَّرْبِ.

اِضْرَبْهَا فِي الأَعْدَادِ المُشْتَقَّةِ فَتَكُونُ أَعْدَادَ اسْتِخْدَامٍ.

ثُمَّ ضَعْ البَوَاقِي فَأَضْرِبْهَا فِي أَعْدَادِ الاِسْتِخْدَامِ وَأَجْمَعْهَا فَتُصْبِحُ جُمْلَةً. أَزِلِ الجِذْرَ المُشْتَرَكَ، فَمَا يَتَبَقَّى هُوَ كَمِّيَّةُ الأَرُزِّ المَطْلُوبَةُ.

هَذِهِ المَسْأَلَةُ هِيَ نَفْسُهَا مَا يُسَمَّى فِي كِتَابِ □□سُنْزِي سُوَانْ جِنْغ□□ □كِتَابِ حِسَابِ الجَدِّ□ بِ□□المَسْأَلَةِ الَّتِي لَا نَعْرِفُ فِيهَا عَدَدَ الأَجْسَامِ□□. إِنَّ طَرِيقَةَ قِين جِيُوشَاو العُظْمَى تَسْتَطِيعُ فَهْمَ مَبْدَئِهَا وَتَوْسِيعَ مَنَافِعِهَا، فَلَيْسَتْ مَحْصُورَةً فِي 3 وَ5 وَ7، بَلْ أَيْضًا مِئَاتُ الأَلَافِ وَالأَرْقَامُ الكَبِيرَةُ يُمْكِنُ إِيجَادُهَا.

Editorial Commentary on Problem 9

按： 按余米推数之问，即《孙子算经》卷下第 26 问 □□今有物不知其数□□ 之问也。孙子设三、五、七为问，答以二十三，术曰：三三数之剩二，置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三，以二百一十减之即得。凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五。一百六以上，以一百五减之即得。

孙子之术，暗合大衍之理，然未能明言其立法之原。秦氏乃阐发其奥，著为大衍求一术、大衍总数术，使天下之物不知数者皆有定法可求。不特三、五、七，即元数之繁者、收数之细者、通数之分者、复数之巨者，皆可一以贯之。此秦氏之独造，非前人之所能及也。

其大衍求一术，置奇右上，定居右下，天元一于左上，递互除乘，使右上余一而止。此法与泰西之连分数法、扩展欧几里得算法本质相同，而秦氏早于西方数百年发之。可谓中国数学之瑰宝也。

تَعْلِيقُ المُحَرِّرِ: مَسْأَلَةُ تَعْيِينِ كَمِّيَّةِ الأَرُزِّ البَاقِيَةِ هِيَ نَفْسُ المَسْأَلَةِ رَقْم 26 فِي الجُزْءِ الأَخِيرِ مِنْ كِتَابِ □□سُنْزِي سُوَانْ جِنْغ□□ □كِتَابِ حِسَابِ الجَدِّ□، الَّتِي تَنُصُّ: □□لَدَيْنَا جِسْمٌ لاَ نَعْرِفُ عَدَدَهُ□□. وَضَعَ سُنْزِي الأَرْقَامَ 3 وَ5 وَ7 كَمَسْأَلَةٍ، وَكَانَتِ الإِجَابَةُ 23. وَقَالَتْ طَرِيقَتُهُ: إِذَا عُدَّ ثَلَاثًا ثَلَاثَةً وَبَقِيَ اثْنَانِ، فَضَعْ 140. وَإِذَا عُدَّ خَمْسًا خَمْسَةً وَبَقِيَ ثَلَاثَةٌ، فَضَعْ 63. وَإِذَا عُدَّ سَبْعَةً سَبْعَةً وَبَقِيَ اثْنَانِ، فَضَعْ 30. اِجْمَعْهَا فَتَكُونُ 233، وَاطْرَحْ مِنْهَا 210 فَتَحْصُلُ عَلَى المَطْلُوبِ.

طَرِيقَةُ سُنْزِي تُطَابِقُ مَبْدَأَ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى ضِمْنِيًّا، لَكِنَّهُ لَمْ يَسْتَطِعْ شَرْحَ أَصْلِ تَأْسِيسِهَا. فَقِين جِيُوشَاو هُوَ الَّذِي وَضَحَ أَسْرَارَهَا، وَأَلَّفَ مِنْهَا طَرِيقَةَ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى، وَطَرِيقَةَ جَمْعِ الأَعْدَادِ الكُلِّيَّةِ، حَتَّى صَارَتْ كُلُّ مَسَائِلِ □□الأَجْسَامِ غَيْرِ المَعْلُومَةِ□□ لَهَا طَرِيقَةٌ مُحَدَّدَةٌ يُمْكِنُ البَحْثُ بِهَا. وَلَيْسَتِ الأَرْقَامُ 3 وَ5 وَ7 فَحَسْبُ، بَلْ أَيْضًا الأَعْدَادُ المُعَقَّدَةُ وَالدَّقِيقَةُ وَالكَسْرِيَّةُ وَالضَّخْمَةُ، جَمِيعُهَا يُمْكِنُ حِلُّهَا. وَهَذَا اِخْتِرَاعٌ خَاصٌّ بِقِين جِيُوشَاو لَمْ يَسْبِقْهُ إِلَيْهِ أَحَدٌ.

إِنَّ طَرِيقَتَهُ لاسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ بِالطَّرِيقَةِ العُظْمَى: يُوضَعُ الفَرْدِيُّ فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ، وَالمُثَبَّتُ فِي الأَسْفَلِ الأَيْمَنِ، وَالوَاحِدُ السَّمَاوِيُّ فِي الأَعْلَى الأَيْسَرِ. ثُمَّ تَتَعَاقَبُ القِسَمَاتُ وَالضَّرْبَاتُ حَتَّى يَصِلَ البَاقِي فِي الأَعْلَى الأَيْمَنِ إِلَى الوَاحِدِ. هَذِهِ الطَّرِيقَةُ فِي جَوَاهِرِهَا مُطَابِقَةٌ لِطَرِيقَةِ الكُسُورِ المُتَّصِلَةِ فِي العَالَمِ الغَرْبِيِّ وَخَوَارِزْمِيَّةِ أُقْلِيدُسَ المُمَدَّدَةِ. وَقَدْ اِكْتَشَفَهَا قِين جِيُوشَاو قَبْلَ الغَرْبِ بِعُدَّةِ قُرُونٍ. فَهِيَ حَقًّا مِنْ جَوَاهِرِ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ.

14 Mathematical Analysis of the Dayan Method

التَّحْلِيلُ الرِّيَاضِيُّ لِطَرِيقَةِ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى

14.1 The Chinese Remainder Theorem

مُبَرْهَنَةُ البَوَاقِي الصِّينِيَّةُ

[illegible] $m_1, m_2, \ldots, m_n$ [illegible] $r_1, r_2, \ldots, r_n$, [illegible] N [illegible]:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

تَحُلُّ طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى نِظَامَ المُعَادَلَاتِ التَّبَادُلِيَّةِ الخَطِّيَّةِ.

فَإِذَا أُعْطِيَتْ مَجْمُوعَةٌ مِنَ الوَحْدَاتِ $m_1, m_2, \ldots, m_n$ مُتَبَادِلِيَّةِ القَاسِمِ الأَعْظَمِ وَبَوَاقِيهَا $r_1, r_2, \ldots, r_n$، نَجِدُ N حَيْثُ:

$$\begin{aligned} N &\equiv r_1 \pmod{m_1} \\ N &\equiv r_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ N &\equiv r_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

14.2 Qin Jiushao’s Algorithm

خَوَارِزْمِيَّةُ قِين جِيُوشَاو

[illegible] :1 [illegible] [求定数.] [illegible] [illegible] [元数,] [illegible] [illegible] [illegible

□□□□□□□□.

□□□□ :6 □□□ □□□□□□□□ □求用数.□ □□□□□□□□ $u_i = k_i \cdot M_i$.

□□□□ :7 □□□□□ □□□□□□□□□□□□. □□□ □□□□□□□□□ □□:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

الخُطْوَةُ الأُولَى: الأَعْدَادُ المُثَبَّتَةُ □数定求□. بِنَاءً عَلَى الأَعْدَادِ الأَصْلِيَّةِ □数元□، خَفِّضْهَا ثُنَائِيًّا بِاسْتِخْدَامِ أَقْصَى قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ حَتَّى تَصِيرَ مُتَبَادِلِيَّةَ القَاسِمِ الأَعْظَمِ. قَاعِدَةُ □□خَفِّضِ الفَرْدِيَّ لاَ الزَّوْجِيَّ□□ □偶约弗奇约□ تَضْمَنُ أَنَّ المَحْصُولَ سَيَكُونُ لَهُ تَجْزِئَةٌ وَحِيدَةٌ.

الخُطْوَةُ الثَّانِيَة: الجِذْرُ المُشْتَرَكُ □母衍求□. حَسَابُ $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$.

الخُطْوَةُ الثَّالِثَة: الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ □数衍求□. حَسَابُ $M_i = M/m_i$ لِكُلِّ i.

الخُطْوَةُ الرَّابِعَة: الأَعْدَادُ الفَرْدِيَّةُ □数奇求□. حَسَابُ $g_i = M_i \bmod m_i$.

الخُطْوَةُ الخَامِسَة: اسْتِخْرَاجُ الوَحْدَةِ □术一求衍大□. لِكُلِّ i، إِيجَادُ k_i حَيْثُ:

$$k_i \cdot g_i \equiv 1 \pmod{m_i}$$

وَهَذَا هُوَ العَدَدُ الضِّدُّ التَّضَاعُفِيُّ النُّمُودِجِيُّ.

الخُطْوَةُ السَّادِسَة: أَعْدَادُ الاِسْتِخْدَامِ □数用求□. حَسَابُ $u_i = k_i \cdot M_i$.

الخُطْوَةُ السَّابِعَة: الحِسَابُ النِّهَائِيُّ. الحَلُّ هُوَ:

$$N = \sum_{i=1}^{n} r_i \cdot u_i \pmod{M}$$

14.3 Historical Significance

الأَهَمِّيَّةُ التَّارِيخِيَّةُ

□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□ □□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□. □□□ □□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □大 衍 求 一 术□ □□ □□□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□. □□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□ □□□ □□□□□□□□□ □郭 守 敬□ □□ □□□□□□□□□□, □□ □□ □□ □李冶□ □□ □□□□□□□□□, □□□ □□□ □□□□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□ □□□□□□ □□ □□□□□□□ □□□□□□ □□ □□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□.□□

□□□□□ □□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□ □□ □□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ ,□1801□

[illegible]

> 独大衍法不载九章，未有能推之者。历家演法颇用之，以为方程者，误也。
>
> [illegible]

سَبَقَتْ طَرِيقَةُ قِين جِيُوشَاو الأَعْمَالَ الأُورُوبِيَّةَ المُشَابِهَةَ بِعِدَّةِ قُرُونٍ. إِنَّ خَوَارِزْمِيَّةَ إِيجَادِ الأَعْدَادِ الضِّدِّيَّةِ النُّمُودِجِيَّةِ 大衍求一术 هِيَ فِي جَوَاهِرِهَا خَوَارِزْمِيَّةُ أُقْلِيدُسَ المُمَدَّدَةِ. وَقَدْ طُبِّقَتِ الطَّرِيقَةُ لاحِقًا عَلَى يَدِ جُو شُوشِنْج فِي عِلْمِ الفَلَكِ، وَعَلَى يَدِ لِي يِه فِي عِلْمِ الهندسَةِ، ثُمَّ نُقِلَتْ إِلَى أُورُوبَّا حَيْثُ أَصْبَحَتْ مَعْرُوفَةً بِاسْمِ مُبَرْهَنَةِ البَوَاقِي الصِّينِيَّةِ.

أَعْطَى غَاوْسُ أَوَّلَ مُعَالَجَةٍ كَامِلَةٍ فِي أُورُوبَّا فِي كِتَابِهِ [illegible] عَام 1801، وَسَمَّاهَا مَشْكِلَةَ إِيجَادِ عَدَدٍ الَّذِي عِنْدَ قِسْمَتِهِ عَلَى أَعْدَادٍ مُعْطَاةٍ، يَتْرُكُ بَوَاقِيَ مُعْطَاةٍ. وَالآنَ تُعْتَبَرُ هَذِهِ المُبَرْهَنَةُ مِنَ النَّتَائِجِ الأَسَاسِيَّةِ فِي نَظَرِيَّةِ الأَعْدَادِ.

> وَحْدَهَا طَرِيقَةُ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى لَمْ تُذْكَرْ فِي كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ، وَلَمْ يَكُنْ هُنَاكَ مَنْ يَسْتَطِيعُ اسْتِنْبَاطَهَا. أَهْلُ التَّقَاوِيمِ اسْتَخْدَمُوهَا كَثِيرًا فِي حِسَابَاتِهِمْ، لَكِنَّ مَنْ ظَنَّهَا مُعَادَلَاتٍ فَقَدْ أَخْطَأَ.
>
> [illegible] قِين جِيُوشَاو، مُقَدِّمَةُ شُو شُو جِوْ جَانْغ

About This Bilingual Edition

[illegible]

[illegible] → [illegible]:

- 问 [illegible]
- 答 [illegible]
- 术 [illegible]
- 草 [illegible]

[illegible] 9 [illegible]

[illegible]:

- [illegible]大衍[illegible] → الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى [illegible]
- [illegible]求一术[illegible] → طَرِيقَةُ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ [illegible]
- [illegible]定数[illegible] → الأَعْدَادُ المُثَبَّتَةُ [illegible]
- [illegible]衍数[illegible] → الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ [illegible]
- [illegible]衍母[illegible] → الجِذْرُ المُشْتَرَكُ [illegible]
- [illegible]奇数[illegible] → الأَعْدَادُ الفَرْدِيَّةُ [illegible]
- [illegible]乘率[illegible] → مُعَدِّلَاتُ الضَّرْبِ [illegible]

- 用数 → أَعْدَادُ الاِسْتِخْدَامِ
- 问 → المَسْأَلَةُ
- 答 → الجَوَابُ
- 术 → الطَّرِيقَةُ

[illegible] 四库全书 [illegible] 宜稼堂 [illegible].

تُقَدِّمُ هَذِهِ الطَّبْعَةُ الثُّنَائِيَّةُ الجُزْءَ الأَوَّلَ مِنْ كِتَابِ شُو شُو جِوْ جَانْغ الأَقْسَامُ التِّسْعَةُ فِي العُلُومِ الرِّيَاضِيَّةِ لِقِين جِيُوشَاو، وَهُوَ يُغَطِّي فَصْلَ الطَّرِيقَةِ العُظْمَى 大衍类 مَعَ تِسْعِ مَسَائِلَ فِي مُبَرْهَنَةِ البَوَاقِي الصِّينِيَّةِ وَالتَّحْلِيلِ المُحَدَّدِ المِثَالِ.

هَذِهِ طَبْعَةٌ ثُنَائِيَّةٌ وَجْهَةٌ بِوَجْهَةٍ: صِينِيَّةٌ وَعَرَبِيَّةٌ، تَحْفَظُ الهَيْكَلَ التَّقْلِيدِيَّ:

- نَصُّ المَسْأَلَةِ 问 المَسْأَلَةُ
- الإِجَابَةُ الرَّقْمِيَّةُ 答 الجَوَابُ
- الأُسْلُوبُ العَامُّ 术 الطَّرِيقَةُ
- الشَّرْحُ العَمَلِيُّ 草 العَمَلُ المُفَصَّلُ

المَسْأَلَةُ التَّاسِعَةُ الشَّهِيرَةُ 数推米余 تُقَدِّمُ الحَلَّ الكَامِلَ لِمَسْأَلَةِ العَدَدِ غَيْرِ المَعْلُومِ، الَّتِي ظَهَرَتْ أَوَّلَ مَرَّةٍ فِي كِتَابِ سُنْزِي سُوَانْ جِنْغ كِتَابِ حِسَابِ الجَدِّ، حَوَالَي القُرْنِ 3–5 مِيلَادِيًّا.

المُصْطَلَحَاتُ الرِّيَاضِيَّةُ العَرَبِيَّةُ الرَّئِيسَةُ الَّتِي اِسْتُخْدِمَتْ:

- 大衍 الطَّرِيقَةُ الكُبْرَى
- 术一求 طَرِيقَةُ اسْتِخْرَاجِ الوَحْدَةِ
- 数定 الأَعْدَادُ المُثَبَّتَةُ
- 数衍 الأَعْدَادُ المُشْتَقَّةُ
- 母衍 الجِذْرُ المُشْتَرَكُ
- 数奇 الأَعْدَادُ الفَرْدِيَّةُ
- 率乘 مُعَدِّلَاتُ الضَّرْبِ
- 数用 أَعْدَادُ الاِسْتِخْدَامِ
- 问 المَسْأَلَةُ
- 答 الجَوَابُ
- 术 الطَّرِيقَةُ

النَّصُّ الأَصْلِيُّ مُسْتَوْحًى مِنْ طَبْعَةِ □□سِيكُو تشُوَانْ شُو□□ □四
□书全库 الَّتِي وُرِثَتْ فِي التَّقْلِيدِ الكِتَابِيِّ الصِّينِيِّ.

Technical Notes / مَلَاحِظَاتٌ تَقْنِيَّةٌ

- [illegible]
- [illegible]: [illegible]
- [illegible]: [illegible]
- [illegible] 问, 答, 术, [illegible] 草 [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible] paracol [illegible]: [illegible]

- [illegible]ضُبِطَ بِ
- [illegible] :الخَطُّ الصِّينِيُّ
- [illegible] :الخَطُّ العَرَبِيُّ
- لَمْ يَتَغَيَّرْ الهَيْكَلُ التَّقْلِيدِيُّ لِلمَسْأَلَةِ وَالجَوَابِ وَالطَّرِيقَةِ وَالعَمَلِ المُفَصَّلِ
- الرَّمْزُ الرِّيَاضِيُّ يَتْبَعُ الأَعْرَافَ الحَدِيثَةَ جَانِبًا لِلطَّرِيقَةِ الصِّينِيَّةِ التَّقْلِيدِيَّةِ
- النَّصُّ العَرَبِيُّ يَسْتَخْدِمُ التَّضْبِيطَ مِنَ اليَمِينِ إِلَى اليَسَارِ بِآلِيَّةِ [illegible]
- التَّصْمِيمُ ثُنَائِيُّ الأَعْمِدَةِ: الصِّينِيَّةُ يَسْرَةً وَالعَرَبِيَّةُ يَمْنَةً

Further Reading / قِرَاءَاتٌ إِضَافِيَّةٌ

- [illegible], [illegible]. [illegible]. [illegible], .1973
- [illegible], [illegible]. [illegible]中国数学史.[illegible], .1964
- [illegible], [illegible]. [illegible], .1997
- [illegible], [illegible]. [illegible]数书九章校证.[illegible]

[illegible],
.2004

- لِينْرِيشْت، أ. [illegible] الرِّيَاضِيَاتُ الصِّينِيَّةُ فِي القَرْنِ الثَّالِثَ عَشَرَ، مَطْبَعَةُ مِيتْشِيغَنْ، 1973
- چِيَانْ، بَاوچْونْج [illegible] تَارِيخُ الرِّيَاضِيَاتِ فِي الصِّينِ، دَارُ العُلُومِ، 1964
- مَارْتْلُوفْ، ج.ش. [illegible] تَارِيخُ الرِّيَاضِيَاتِ الصِّينِيَّةِ، سْبْرِنْجِرْ، 1997
- جُوَوْ، شُوچُونْ [illegible] تَدْقِيقُ كِتَابِ الأَقْسَامِ التِّسْعَةِ فِي الرِّيَاضِيَاتِ، شَانْشِي، 2004

[illegible] → [illegible]

طَبْعَةٌ ثُنَائِيَّةُ اللُّغَةِ: الصِّينِيَّةُ وَالعَرَبِيَّةُ

[illegible] 2026

数书九章

كتاب المسائل التسع في الحساب

Fascicle IV / □□□□□ □□□□□□

The Cewang Category (测望类)

باب القياس والمراقبة عن بُعد

Qin Jiushao / 秦九韶 / تشين جيوشاو

حوالي ٦٠٢□□٦٦١ هـ □ □□ 1202□□1261 .□

□□□□□□□□□□ □□ □□□ 7□□ □□□□ □□ □□□□□□□□ □淳祐七年), 1247 CE

وُلِّف في السنة السابعة من حقبة تشونيو، ٦٤٥ هـ □ ١٢٤٧ م

Surveying methods: double difference, similar triangles,
remote measurement of heights, distances, and depths.

طرق القياس: الاختلاف المزدوج، المثلثات المتشابهة،
والأعماق. والمسافات للارتفاعات البعيد القياس

Chinese–Arabic Bilingual Edition

الطبعة الثنائية اللغة: الصينية□□العربية

Left column: Original Classical Chinese
Right column: Arabic Translation

العمود الأيسر: النص الصيني الكلاسيكي الأصلي □□□ العمود الأيمن: الترجمة العربية

Typeset in LaTeX with XeTeX
Noto Sans CJK SC / Noto Naskh Arabic

Contents

Introduction to Cewang / 测望类引

The fourth category of the Shuxue Jiuzhang is Cewang (测望), devoted to surveying and remote measurement. These problems involve measuring inaccessible distances and heights using the “hook-and-gourd” (gougu, 勾股) method and the “double difference” (chongcha, 重差) technique. The methods demonstrated here are foundational to ancient Chinese geodesy and cartography. Qin Jiushao builds upon the classical tradition of the Zhoubi Suanjing and Haidao Suanjing, extending Liu Hui’s sea island methods with sophisticated algebraic techniques including polynomial equations of higher degree.

The Cewang category comprises nine problems divided into two fascicles (juan 4 shang and juan 4 xia): (1) The Round City — using right-triangle methods to determine a city’s diameter from sightings; (2) Measuring a Tower — similar triangles with two poles; (3) The Square City — determining the side of a square city from walk distances; (4) Root Extraction by Counting Rods — computational layout; (5) Measuring Water Depth — the surplus-and-deficit method applied to a well; (6) Measuring a Pagoda’s Height — double difference method with precise numerical data; (7) Distance Across a River — width and height from two observation points; (8) Ninth-Degree Root Extraction — Horner’s method for higher-degree surveying equations.

The Double Difference Method (重差术)

The “double difference” (chongcha, 重差) method, originating with Liu Hui’s commentary on the Jiuzhang Suanshu and fully developed in his Haidao Suanjing (Sea Island Mathematical Manual), is the fundamental technique for all remote measurement problems. Two sightings are taken from different distances, and the differences in angles or alignments allow calculation of the inaccessible quantity. The method rests on the proportionality of corresponding sides in similar right triangles (gougu tongshi, 勾股通势).

In modern notation: if two poles of equal height h are erected at distances d_1 and d_2 from an observer, and the top of a distant object aligns with both pole tops, then the object’s height H and its distance D satisfy: $\frac{H-h_0}{D} = \frac{h-h_0}{d}$, where h_0 is the eye height. From two such observations, both H and D can be determined uniquely.

مقدمة باب القياس والمراقبة

البابُ الرابع من كتاب المسائل التسع في الحساب هو قياس ومراقبة □测望□، المكرس للمساحة والقياس عن بُعد. تتضمن هذه المسائل قياس المسافات والارتفاعات غير المتاحة باستخدام طريقة □□الوتر والقائمة□□ □勾股□ وتقنية □□الاختلاف المزدوج□□ □重差□. تُشكِّل هذه الطرق أساس الجيوديسيا والخرائط الصينية القديمة. يبني تشين جيوشاو على التقليد الكلاسيكي لـكتاب تشوبي الحسابي وكتاب جزيرة البحر الحسابي، موسّعاً طرق جزيرة البحر لـليو هوي بتقنيات جبرية متطورة تشمل معادلات متعددة الحدود من درجات عليا.

يتضمن بابُ القياس والمراقبة تسع مسائل مقسَّمة على جزأين □الجزء الرابع أ والرابع ب□: □١□ المدينة الدائرية □□□ استخدام طرق المثلثات القائمة لتحديد قطر مدينة من قياسات بصرية؛ □٢□ قياس برج □□□ مثلثات متشابهة بعمودين؛ □٣□ المدينة المربعة □□□ تحديد ضلع مدينة مربعة من مسافات المشي؛ □٤□ استخراج الجذر بالأعواد الحسابية □□□ تخطيط حسابي؛ □٥□ قياس عمق الماء □□□ تطبيق طريقة الوفرة والنقصان على بئر؛ □٦□ قياس ارتفاع الباغودا □□□ طريقة الاختلاف المزدوج ببيانات رقمية دقيقة؛ □٧□ المسافة عبر النهر □□□ العرض والارتفاع من نقطتي مراقبة؛ □٨□ استخراج الجذر من الدرجة التاسعة □□□ طريقة هورنر لمعادلات القياس من الدرجات العليا.

طريقة الاختلاف المزدوج □重差术□

طريقةُ □□الاختلاف المزدوج□□ □重差□، المنشأة من تعليقات ليو هوي على كتاب المسائل التسع في الحساب والمُطوَّرة كلياً في كتاب جزيرة البحر الحسابي، هي التقنية الأساسية لجميع مسائل القياس البعيد. تُؤخذ قيستان بصريتان من مسافتين مختلفتين، وسماحات الزوايا أو المحاذاة تسمح بحساب الكمية غير المتاحة. تستند الطريقة على التناسبية للأضلاع المتقابلة في المثلثات القائمة المتشابهة □勾股通势□.

في الرمز الحديث: إذا نُصب عمودان بنفس الارتفاع h على مسافتين d_1 وd_2 من المراقب، ومحاذى قمة جسم بعيد مع قمتَي العمودين، فإن ارتفاع الجسم H ومسافته D يحققان: $\frac{H-h_0}{D} = \frac{h-h_0}{d}$، حيث h_0 هو ارتفاع العين. من ملاحظتين كهاتين، يمكن تحديد H وD بشكل فريد.

Juan 4 Shang —Cewang (Fascicle 4, Part 1: Surveying)

الجزء الرابع أ —القياس والمراقبة

Original preface to this fascicle: The methods of this fascicle concern squares, circles, oblique and straight lines, all sought through mutual relations. The fundamental principles derive from the method of the celestial element. Those problems difficult to solve by conventional methods are all resolved effortlessly when illuminated by the celestial element method.

المقدمة الأصلية لهذا الجزء: تتعلق طرق هذا الجزء بالمربعات والدوائر والخطوط المائلة والمستقيمة، كلها مُطلَبة من خلال العلاقات المتبادلة. المبادئ الأساسية مستمدة من طريقة العنصر السماوي. تُحلُّ جميع المسائل الصعبة حلاً بأساليب تقليدية بسهولة عندما تُضاء بطريقة العنصر السماوي.

Problem 1: The Round City (圆城)

المسألة الأولى: المدينة الدائرية [圆城]

问 (Wen) 有圆城不知周径，四门中开，北外三里有乔木。出南门边直行，至东行九里乃见木。欲知城周径各几何。

المسألة [سؤال] توجدُ مدينة دائرية ذات محيط وقطر مجهولين. بها أربعة أبواب مفتوحة في الاتجاهات الأصلية. على بعد ثلاثة لي شمال الباب الشمالي تقف شجرة عالية. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة، ثم الانعطاف شرقاً تسعة لي، تُرى الشجرة. أريد معرفة محيط المدينة وقطرها.

Translation: There is a circular city whose circumference and diameter are unknown. It has four gates at the cardinal points. Three li north of the north gate stands a tall tree. Going out the south gate, walking straight, then turning east for 9 li, the tree becomes visible. Find the circumference and diameter of the city.

الترجمة: توجد مدينة دائرية محيطها وقطرها مجهولان. بها أربعة أبواب في الاتجاهات الأصلية. على بُعد ثلاثة لي شمال الباب الشمالي شجرة عالية. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة ثم الانعطاف شرقاً تسعة لي، تظهر الشجرة. أوجد محيط المدينة وقطرها.

答 (Da) 径九里，周二十七里。

الجواب [جواب] القطر تسعة لي، والمحيط سبعة وعشرون لي.

Answer: The diameter is 9 li, the circumference is 27 li.

الإجابة: القطر تسعة لي، والمحيط سبعة وعشرون لي.

术 (Shu) 以勾股夕桀求之。一为从隅，五因北里为从七廉，置北里幂八因为从五廉，以北里乘上廉为益从，三廉北覆率乘五廉，为益上廉，以北里乘上廉为实，开玲珑九乘方得数，自乘为径，以三因径得周。

الطريقة [طريقة] تُحسب بطريقة [الوتر والقائمة عند الغروب]. خذ الواحد معاملاً رئيسياً، اضرب المسافة الشمالية في خمسة للمعامل من الدرجة السابعة. ضع مربع المسافة الشمالية، اضرب في ثمانية للمعامل من الدرجة الخامسة. اضرب المسافة الشمالية في المعامل العلوي للمعامل الخطي السالب. اضرب المعاملات للحصول على المعاملات العلوية السالبة. اضرب المسافة الشمالية في المعامل العلوي للمقسوم. استخرج الجذر التاسع [الجذر المُزخرف] للحصول على العدد، ثم ربِّعه للحصول على القطر. اضرب القطر في ثلاثة للحصول على المحيط.

Method: Using the “hook-and-gourd evening-peak” method. Take 1 as the leading coefficient. Multiply the north distance by 5 for the seventh-degree coefficient. Place the square of the north distance, multiply by 8 for the fifth-degree coefficient. Multiply the north distance by the upper coefficient for the negative linear coefficient. Double the negative rate to form the fifth-degree coefficient as the negative upper coefficient. Multiply the north distance by the upper coefficient for the dividend. Extract the ninth-degree root (ling long kai fang) to obtain the number; square it for the diameter. Multiply the diameter by 3 for the circumference.

الشرح: تُستخدم طريقة [الوتر والقائمة عند الغروب]. يؤخذ الواحد معاملاً قيادياً. تُضرب المسافة الشمالية في خمسة للمعامل من الدرجة السابعة. يُوضع مربع المسافة الشمالية ويُضرب في ثمانية للمعامل من الدرجة الخامسة. تُضرب المسافة الشمالية في المعامل الأعلى للمعامل الخطي السالب. يُضاعف معدل السالب لتكوين المعامل الخامس كمعامل أعلى سالب. تُضرب المسافة الشمالية في المعامل الأعلى للمقسوم. يُستخرج الجذر من الدرجة التاسعة [فتح المربع المُزخرف] للحصول على العدد؛ يُربَّع للحصول على القطر. يُضرب القطر في ثلاثة للحصول على المحيط.

Problem 2: Measuring a Tower (测塔)

问 (Wen) 有塔高为数起，去塔若干步立一表，人目上望见塔尖，退行若干步又立一表，人目上望仍见塔尖。求塔高及去塔远近。

Translation: A tower of unknown height stands at an unknown distance. At a certain distance from the tower, a pole is erected; looking upward from eye level, the tower's peak is visible. Retreating a certain distance and erecting another pole, the peak is again visible from eye level. Find the tower's height and distance.

答 (Da) 塔高若干，去塔远若干。

Answer: The tower's height is a certain number; its distance is a certain number.

术 (Shu) 以勾股求之。两表退行之差为法，前表去塔远乘表高，后表去塔远乘表高，相减为实，实如法而一得塔高。又以法除前表去塔远乘两表高差加表高得塔高。

Method: Using the hook-and-gourd method. The difference between the retreat distances of the two poles is the divisor. Multiply the front pole's distance to the tower by the pole height; multiply the rear pole's distance by the pole height; subtract to obtain the dividend. Divide to get the tower height. Alternatively, multiply the front distance by the difference of pole heights, divide by the divisor, and add the pole height.

Modern formulation: Let d_1 = front distance, d_2 = rear distance, h = pole height, e = eye height. Then by similar triangles: $\frac{H-e}{D} = \frac{h-e}{d_1} = \frac{h-e}{d_2-d_1}$ whence H and D can be found.

Problem 3: The Square City (方城)

问 (Wen) 有方城一座，不知大小。北门外有树，出南门直行若干步，折而西行若干步见树。求城方面。

Translation: There is a square city of unknown size. Outside the north gate stands a tree. Going out the south gate and walking straight a certain number of steps, then turning west and walking a certain number of steps, the tree becomes visible. Find the side of the square city.

المسألة الثانية: قياس البرج (塔测)

المسألة (سؤال) يوجدُ برجٌ ذو ارتفاع مجهول. على بُعد عدد من الخطوات من البرج يُنصب عمود، ومن مستوى العين ينظر المرء إلى أعلى فيرى قمة البرج. يتراجع عدداً من الخطوات ويُنصب عمودٌ آخر، ومن مستوى العين يرى القمة مجدداً. أوجد ارتفاع البرج ومسافته.

الترجمة: برج ذو ارتفاع مجهول يقف على مسافة مجهولة. على مسافة معينة من البرج يُنصب عمود؛ بالنظر إلى الأعلى من مستوى العين تُرى قمة البرج. بالتراجع مسافة معينة ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً من مستوى العين. أوجد ارتفاع البرج ومسافته.

الجواب (جواب) ارتفاع البرج عدد معين، ومسافته عدد معين.

الإجابة: ارتفاع البرج عدد معين، ومسافته عدد معين.

الطريقة (طريقة) تُحسب بطريقة الوتر والقائمة. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. اضرب مسافة العمود الأمامي من البرج في ارتفاع العمود، واضرب مسافة العمود الخلفي من البرج في ارتفاع العمود، اطرح للحصول على المقسوم. اقسم للحصول على ارتفاع البرج. أو اضرب مسافة العمود الأمامي في فرق ارتفاعي العمودين، اقسم على القاسم، وأضف ارتفاع العمود للحصول على ارتفاع البرج.

الشرح: تُستخدم طريقة الوتر والقائمة. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. تُضرب مسافة العمود الأمامي من البرج في ارتفاع العمود؛ وتُضرب مسافة العمود الخلفي في ارتفاع العمود؛ يُطرح للحصول على المقسوم. يُقسم للحصول على ارتفاع البرج. أو تُضرب المسافة الأمامية في فرق ارتفاعي العمودين، يُقسم على القاسم، ويُضاف ارتفاع العمود.

الصياغة الحديثة: ليكن d_1 المسافة الأمامية، d_2 المسافة الخلفية، h ارتفاع العمود، e ارتفاع العين. فبالمثلثات المتشابهة: $\frac{H-e}{D} = \frac{h-e}{d_1} = \frac{h-e}{d_2-d_1}$ ومنه يُمكن إيجاد H وD.

المسألة الثالثة: المدينة المربعة (方城)

المسألة (سؤال) توجدُ مدينة مربعة الحجم مجهولة. خارج الباب الشمالي شجرة. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة عدداً من الخطوات، ثم الانعطاف غرباً عدداً من الخطوات، تُرى الشجرة. أوجد ضلع المدينة.

الترجمة: توجد مدينة مربعة مجهولة الحجم. خارج الباب الشمالي شجرة. عند الخروج من الباب الجنوبي والسير مباشرة عدداً من الخطوات، ثم الانعطاف غرباً عدداً من الخطوات، تظهر الشجرة. أوجد ضلع المدينة المربعة.

答 (Da) 城方面若干步。

Answer: The city's side is a certain number of bu.

术 (Shu) 以勾股求之。两行步相乘为实，并两行步为从方，开平方得城方面。

Method: Using the hook-and-gourd method. Multiply the two walk distances for the dividend. Add the two walk distances for the linear coefficient. Extract the square root to obtain the city's side.

Modern formulation: If a = southward steps and b = westward steps, then the side x satisfies: $x^2 + (a+b)x = ab$, whence $x = \frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}$.

Problem 4: Counting Rod Root Extraction (筹算开方)

问 (Wen) 问以开方术解高次方程，其筹布列之法若何。

Translation: On the method of extracting roots to solve higher-degree equations, how are the counting rods arranged?

术 (Shu) 开方之法，先列实于中，次列隅于下，次列方于上。商除之，以上乘隅生廉，以上乘廉生方，以上乘方除实。实尽则止，不尽则倍方，三廉为方法，续商除之。

Method: In the method of root extraction, first place the dividend (shi) in the middle, then place the unit coefficient (yu) below, and the linear coefficient (fang) above. Divide by estimation; multiply the estimate by the unit coefficient to generate the linear coefficient (lian); multiply the estimate by the linear coefficient to generate the square coefficient (fang); multiply the estimate by the square coefficient and subtract from the dividend. When the dividend is exhausted, stop. If not exhausted, double the linear coefficient and proceed to the next digit.

الجواب جواب ضلع المدينة عدد معين من الخطوات.

الإجابة: ضلع المدينة عدد معين من الخطوات.

الطريقة طريقة تُحسب بطريقة الوتر والقائمة. اضرب مسافتي السير للحصول على المقسوم. اجمع مسافتي السير للمعامل الخطي. استخرج الجذر التربيعي للحصول على ضلع المدينة.

الشرح: تُستخدم طريقة الوتر والقائمة. تُضرب مسافتا السير للحصول على المقسوم. يُجمع مسافتا السير للمعامل الخطي. يُستخرج الجذر التربيعي للحصول على ضلع المدينة.

الصياغة الحديثة: إذا كانت a خطوات جنوبية وb خطوات غربية، فإن الضلع x يحقق: $x^2 + (a+b)x = ab$، ومنه $x = \frac{-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2+4ab}}{2}$.

المسألة الرابعة: استخراج الجذر بالأعواد الحسابية (筹算开方)

المسألة سؤال عن طريقة استخراج الجذور لحل المعادلات ذات الدرجات العليا، كيف تُرتَّب الأعواد الحسابية؟

الترجمة: عن طريقة استخراج الجذور لحل المعادلات من الدرجات العليا، كيف تُرتَّب الأعواد الحسابية؟

الطريقة طريقة في طريقة استخراج الجذر، ضع المقسوم في الوسط أولاً، ثم ضع المعامل الوحدي في الأسفل، ثم ضع المعامل الخطي في الأعلى. اقسم بالتقدير؛ اضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعامل الخطي، اضرب التقدير في المعامل الخطي لإنتاج المعامل التربيعي، اضرب التقدير في المعامل التربيعي واطرح من المقسوم. عندما ينفد المقسوم، توقف. إذا لم ينفد، اضعف المعامل الخطي واستمر للرقم التالي.

الشرح: في طريقة استخراج الجذر، يُوضع المقسوم في الوسط أولاً، ثم يُوضع المعامل الوحدي في الأسفل، والمعامل الخطي في الأعلى. يُقسم بالتقدير؛ تُضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعامل الخطي، تُضرب التقدير في المعامل الخطي لإنتاج المعامل التربيعي، تُضرب التقدير في المعامل التربيعي ويُطرح من المقسوم. عندما ينفد المقسوم، التوقف. إذا لم ينفد، يُضاعف المعامل الخطي ويُستمر للرقم التالي.

Juan 4 Xia —Cewang Xu (Fascicle 4, Part 2: Surveying Continued)

الجزء الرابع ب —القياس والمراقبة □تابع□

Problem 5: Measuring Depth of Water (测水深)

问 (Wen) 有井不知其深，以绳测之，绳长倍于井深，余三尺；三折而测之适足。求井深及绳长。

Translation: There is a well of unknown depth. Measuring with a rope, the rope's length is twice the well's depth with 3 chi to spare. Folding the rope in three and measuring, it fits exactly. Find the depth of the well and the length of the rope.

答 (Da) 井深三尺，绳长九尺。

Answer: The well is 3 chi deep; the rope is 9 chi long.

术 (Shu) 以盈不足求之。倍绳余三尺为盈，三折适足为适足，以盈乘适足为实，并盈适足为法，除之得井深。倍之加余得绳长。

Method: Using the "surplus and deficit" (ying bu zu) method. The 3 chi excess when doubled is the surplus; the exact fit when tripled is the exact amount. Multiply the surplus by the exact amount for the dividend; add surplus and exact amount for the divisor; divide to obtain the well depth. Double and add the excess for the rope length.

Modern solution: Let d = well depth, L = rope length. Then $L = 2d + 3$ and $L/3 = d$. Substituting: $2d + 3 = 3d$, giving $d = 3$, $L = 9$.

المسألة الخامسة: قياس عمق الماء □测水深□

المسألة □سؤال□ بئر عمقها مجهول. بقياسها بحبل، يكون طول الحبل ضعف عمق البئر مع فائض ثلاثة أشبار؛ بطيّ الحبل على ثلاثة وقياسها، يكون بالضبط. أوجد عمق البئر وطول الحبل.

الترجمة: بئر عمقها مجهول. بقياسها بحبل، يكون طول الحبل ضعف عمق البئر مع فائض ثلاثة أشبار. بطي الحبل على ثلاث وقياسها، يناسب بالضبط. أوجد عمق البئر وطول الحبل.

الجواب □جواب□ عمق البئر ثلاثة أشبار، وطول الحبل تسعة أشبار.

الإجابة: عمق البئر ثلاثة أشبار، وطول الحبل تسعة أشبار.

طريقة □طريقة□ تُحسب بطريقة الوفرة والنقصان. الفائض ثلاثة أشبار عند مضاعفة الحبل هو الوفرة؛ الملاءمة التامة عند الطي على ثلاثة هي الملاءمة. اضرب الوفرة في الملاءمة للمقسوم، واجمع الوفرة والملاءمة للقاسم، اقسم للحصول على عمق البئر. اضعف وأضف الفائض للحصول على طول الحبل.

الشرح: تُستخدم طريقة □□الوفرة والنقصان□□. الفائض ثلاثة أشبار عند مضاعفة الحبل هو الوفرة؛ الملاءمة التامة عند الطي على ثلاثة هي الملاءمة. تُضرب الوفرة في الملاءمة للمقسوم؛ تُجمع الوفرة والملاءمة للقاسم؛ يُقسم للحصول على عمق البئر. يُضاعف ويُضاف الفائض للحصول على طول الحبل.

الحل الحديث: ليكن d عمق البئر، L طول الحبل. فإن $L = 2d+3$ و$L/3 = d$. بالتعويض: $2d + 3 = 3d$، فيعطي $d = 3$، $L = 9$.

Problem 6: Measuring the Height of a Pagoda (测塔高)

问 (Wen) 有塔高未知，去塔百步立一表高五尺，人目去表一尺八寸，上望塔尖与表端参合。退行六十步，人目去表端仍参合塔尖。求塔高及塔心去表远近。

Translation: A pagoda of unknown height stands at an unknown distance. 100 bu from the pagoda, a 5-chi pole is erected. The observer's eye is 1.8 chi from the ground; looking up, the pagoda's peak aligns with the pole's tip. Retreating 60 bu, the observer's eye again aligns with both the pole's tip and the pagoda's peak. Find the pagoda's height and its distance from the pole.

المسألة السادسة: قياس ارتفاع الباغودا □测高塔□

المسألة □سؤال□ باغودا ارتفاعها مجهول. على بُعد مئة خطوة منها يُنصب عمود ارتفاعه خمسة أشبار. عين المراقب على ارتفاع شبر واحد وثمانية بوصات من الأرض؛ بالنظر إلى الأعلى تتطابق قمة الباغودا مع قمة العمود. بالتراجع ستين خطوة، تتطابق عين المراقب مع القمتين مجدداً. أوجد ارتفاع الباغودا ومسافتها عن العمود.

الترجمة: باغودا ارتفاعها مجهول تقف على مسافة مجهولة. على بُعد مئة خطوة يُنصب عمود خمسة أشبار. عين المراقب على ارتفاع شبر وثمانية بوصات؛ بالنظر إلى الأعلى تتطابق القمة مع قمة العمود. بالتراجع ستين خطوة تتطابق العين مع القمتين. أوجد ارتفاع الباغودا ومسافتها عن العمود.

答 (Da) 塔身高三丈，塔高一十一丈七尺，与八丈七尺为塔心目长。

Answer: The pagoda's body is 3 zhang high; the total height (from ground to peak) is 11 zhang 7 chi; the distance from the pagoda's center to the measuring point is 8 zhang 7 chi.

术 (Shu) 此皆大小形通势相求法也。人目去塔为总股，较人目去干为分小股，人目上塔尖高塔身皆为总股高。相轮高为分大勾，数以干去塔分大勾与小较干去塔为分大勾。

Method: These are all applications of similar triangles (da xiao xing tong shi). The distance from eye to pagoda is the total height line (zong gu); the distance from eye to pole is the small height line (fen xiao gu). The height from eye level to pagoda peak is the total height; the height from eye level to pole top is the small height. The method uses proportional relationships between these quantities.

Modern formulation: Using similar triangles with two poles:

$$\frac{\text{Pagoda height} - \text{eye height}}{\text{Distance to pagoda}} = \frac{\text{Pole height} - \text{eye height}}{\text{Distance to pole}}$$

With the given numerical values, this yields the pagoda height $H = 117$ chi and distance $D = 87$ chi.

Problem 7: Distance Across a River (隔河测远)

问 (Wen) 问隔河望一高岸，不知其远。平地立一表，人目上望见岸顶，又退立一表望之亦见岸顶。求河阔及岸高。

Translation: Across a river, a high bank is visible at an unknown distance. A pole is erected on level ground; looking up from eye level, the bank's top is visible. Retreating and erecting another pole, the bank's top is again visible. Find the width of the river and the height of the bank.

答 (Da) 河阔若干步，岸高若干尺。

术 (Shu) 以重差求之。两表退行步数之差为法，前表去岸远乘表高为实，实如法而一得岸高。又以法除后表去岸远乘表高亦得岸高，两者相验。

الجواب جواب جسد الباغودا ثلاثة أزرة ارتفاعاً، وإجمالي ارتفاعها أحد عشر زراً وسبعة أشبار، ومسافة مركزها عن نقطة القياس ثمانية أزرة وسبعة أشبار.

الإجابة: جسد الباغودا ثلاثة أزرة ارتفاعاً؛ الإرتفاع الكلي من الأرض إلى القمة أحد عشر زراً وسبعة أشبار؛ المسافة من مركز الباغودا إلى نقطة القياس ثمانية أزرة وسبعة أشبار.

الطريقة طريقة كل هذه تطبيقات لطريقة المثلثات المتشابهة اسم. مسافة العين من الباغودا هي الوتر الكلي؛ مسافة العين من العمود هي الوتر الصغير؛ ارتفاع قمة الباغودا عن مستوى العين هو الارتفاع الكلي. ارتفاع العجلة الدائرية هو القائمة الكبرى؛ تُستخدم النسب بين هذه الكميات.

الشرح: هذه كلها تطبيقات للمثلثات المتشابهة. مسافة العين من الباغودا هي الوتر الكلي؛ مسافة العين من العمود هي الوتر الصغير. ارتفاع قمة الباغودا عن مستوى العين هو الارتفاع الكلي؛ ارتفاع قمة العمود عن مستوى العين هو الارتفاع الصغير. تستخدم الطريقة العلاقات التناسبية بين هذه الكميات.

الصياغة الحديثة: باستخدام المثلثات المتشابهة بعمودين:

$$\frac{\text{العين ارتفاع} - \text{العمود ارتفاع}}{\text{العمود إلى المسافة}} = \frac{\text{العين ارتفاع} - \text{الباغودا ارتفاع}}{\text{الباغودا إلى المسافة}}$$

بالقيم الرقمية المعطاة، يُعطى هذا ارتفاع الباغودا $H = 117$ شبراً ومسافة $D = 87$ شبراً.

المسألة السابعة: القياس عبر النهر اسم

المسألة سؤال عبر نهر، ضفة مرتفعة مرئية على مسافة مجهولة. يُنصب عمود على أرض مستوية؛ بالنظر إلى الأعلى من مستوى العين تُرى قمة الضفة. بالتراجع ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً. أوجد عرض النهر وارتفاع الضفة.

الترجمة: عبر نهر، ضفة مرتفعة مرئية على مسافة مجهولة. يُنصب عمود على أرض مستوية؛ بالنظر إلى الأعلى تُرى قمة الضفة. بالتراجع ونصب عمود آخر، تُرى القمة مجدداً. أوجد عرض النهر وارتفاع الضفة.

الجواب جواب عرض النهر عدد معين من الخطوات، وارتفاع الضفة عدد معين من الأشبار.

الطريقة طريقة تُحسب بطريقة الاختلاف المزدوج. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. اضرب مسافة العمود الأمامي من الضفة في ارتفاع العمود للمقسوم، اقسم للحصول على ارتفاع الضفة. وبالمثل للعمود الخلفي؛ ينبغي أن يتفق الناتجان للتحقق.

Method: Using the “double difference” (chong cha) method. The difference between the two retreat distances is the divisor. Multiply the front pole’s distance to the bank by the pole height for the dividend; divide to obtain the bank height. Similarly for the rear pole; the two results should agree (providing verification).

الشرح: تُستخدم طريقة □□الاختلاف المزدوج□□. فرق مسافتي التراجع للعمودين هو القاسم. تُضرب مسافة العمود الأمامي من الضفة في ارتفاع العمود للمقسوم؛ يُقسم للحصول على ارتفاع الضفة. وبالمثل للعمود الخلفي؛ ينبغي أن يتفق الناتجان □للتحقق□.

Note: The “double difference” method uses two observations to eliminate the unknown distance, yielding the height directly. This is the method used by Liu Hui in the Haidao Suanjing for measuring the sea island. Qin Jiushao generalizes it to polynomial equations of arbitrary degree.

ملاحظة: تستخدم طريقة □□الاختلاف المزدوج□□ ملاحظتين للتخلص من المسافة المجهولة، معطية الارتفاع مباشرة. هذه هي الطريقة التي استخدمها ليو هوي في كتاب جزيرة البحر لقياس جزيرة البحر. يُعمِّمها تشين جيوشاو إلى معادلات متعددة الحدود من درجة عشوائية.

Problem 8: Ninth-Degree Root Extraction (**九乘方**)

المسألة الثامنة: استخراج الجذر من الدرجة التاسعة □方乘九□

问 (Wen) 问以开九乘方术解方程，其立法之原若何。

المسألة □سؤال□ عن طريقة استخراج الجذر من الدرجة التاسعة لحل المعادلات □□□ ما المبدأ الأساسي لهذه الطريقة؟

Translation: On the method of extracting ninth-degree roots to solve equations — what is the fundamental principle of this method?

الترجمة: عن طريقة استخراج الجذور من الدرجة التاسعة لحل المعادلات □□□ ما المبدأ الأساسي لهذه الطريقة؟

术 (Shu) 开方之术，至于九乘方，其理一也。先列实于中，次定隅位，次立方法、廉法。商除之际，以上乘隅生廉，以上乘廉生方，以上乘方除实。每进一位，则方退一，廉退二，隅退三。如是迭进，直至实尽为止。

الطريقة □طريقة□ طريقة استخراج الجذر، حتى الدرجة التاسعة، تتبع نفس المبدأ. ضع المقسوم في الوسط أولاً، ثم حدد موضع المعامل الوحدي، ثم أَسِّس المعامل الخطي والمعاملات الوسيطة. عند القسمة بالتقدير: اضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعاملات الوسيطة، اضرب التقدير في المعاملات الوسيطة لتوليد المعامل الخطي، اضرب التقدير في المعامل الخطي واطرح من المقسوم. عند كل إزاحة عشرية، يتراجع المعامل الخطي مرتبة واحدة، والمعاملات الوسيطة مرتبتين، والمعامل الوحدي ثلاث. استمر تكرارياً حتى ينفد المقسوم.

Method: The method of root extraction, up to the ninth degree, follows the same principle. First place the dividend in the middle; then determine the unit position; then establish the linear and intermediate coefficients. During division-by-estimation: multiply the estimate by the unit coefficient to generate the intermediate coefficients; multiply the estimate by the intermediate coefficients to generate the linear coefficient; multiply the estimate by the linear coefficient and subtract from the dividend. At each decimal shift, the linear coefficient descends one place, the intermediate descend two places, and the unit descends three. Continue iteratively until the dividend is exhausted.

الشرح: طريقة استخراج الجذر، حتى الدرجة التاسعة، تتبع نفس المبدأ. يُوضع المقسوم في الوسط؛ ثم يُحدد موضع المعامل الوحدي؛ ثم تُؤسَّس المعاملات الخطية والوسيطة. عند القسمة بالتقدير: تُضرب التقدير في المعامل الوحدي لتوليد المعاملات الوسيطة؛ تُضرب التقدير في المعاملات الوسيطة لتوليد المعامل الخطي؛ تُضرب التقدير في المعامل الخطي ويُطرح من المقسوم. عند كل إزاحة عشرية، يتراجع المعامل الخطي مرتبة، والوسيطة مرتبتين، والوحدة ثلاث. استمرار تكراري حتى ينفد المقسوم.

Mathematical note: This describes Horner's method for solving polynomial equations, which Qin Jiushao developed independently centuries before Horner. For a polynomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, the method systematically reduces the polynomial by factoring out $(x - r)$ where r is the estimated root at each step. Qin's achievement in solving tenth-degree equations was unprecedented in world mathematics.

ملاحظة رياضية: يصف هذا طريقة هورنر لحل المعادلات متعددة الحدود، التي طوّرها تشين جيوشاو بشكل مستقل قروناً قبل هورنر. لمعادلة من الدرجة n: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$، تُنقص الطريقة المعادلة [redacted] بإخراج العامل $(x - r)$ حيث r هو الجذر المقدَّر في كل خطوة. كان إنجاز تشين في حل معادلات الدرجة العاشرة بلا سابق في تاريخ الرياضيات العالمية.

Appendix: Surveying Methods in Chinese Mathematics

ملحق: طرق القياس في الرياضيات الصينية

A.1 The Double Difference Method (重差术)

The “double difference” (chong cha, 重差) method is the crowning achievement of ancient Chinese surveying. Originating in Liu Hui’s commentary on the Jiuzhang Suanshu (c. 263 CE) and given full expression in his Haidao Suanjing, the method uses two (or more) observations from different positions to determine inaccessible heights and distances.

The name “double difference” refers to the two difference measurements: the difference in distances between the two observation points, and the difference in alignment angles (or pole heights). From these two differences, the unknown quantities are calculated by proportional reasoning through similar right triangles.

أ.١ طريقة الاختلاف المزدوج 重差术

تُعدُّ طريقةُ الاختلاف المزدوج 重差 إنجازاً تاجياً في المساحة الصينية القديمة. نشأت في تعليقات ليو هوي على كتاب المسائل التسع حوالي ٢٦٣ م وأُعطيت صياغة كاملة في كتاب جزيرة البحر الحسابي، تستخدم الطريقة ملاحظتين أو أكثر من مواضع مختلفة لتحديد الارتفاعات والمسافات غير المتاحة.

يشير اسم الاختلاف المزدوج إلى قياسي الاختلاف: فرق المسافات بين نقطتي الملاحظة، وفرق زوايا المحاذاة أو ارتفاعات العمود. من هذين الاختلافين، تُحسب الكميات المجهولة بالتناسل من خلال المثلثات القائمة المتشابهة.

A.2 Similar Triangles in Chinese Mathematics (勾股通势)

The Chinese term gougu tongshi (勾股通势, “corresponding forms of hook and gourd”) expresses the principle of similar right triangles. The gou (勾) is the base, the gu (股) is the altitude, and the xian (弦) is the hypotenuse. When two right triangles share an acute angle, their corresponding sides are proportional: $\frac{\text{gou}_1}{\text{gou}_2} = \frac{\text{gu}_1}{\text{gu}_2} = \frac{\text{xian}_1}{\text{xian}_2}$.

This principle, equivalent to what Euclid called the property of similar triangles (Elements VI.4), was used extensively in Chinese surveying. The Ce Wang problems all reduce to setting up proportions between known and unknown gou-gu pairs and solving for the inaccessible quantity.

أ.٢ المثلثات المتشابهة في الرياضيات الصينية 勾股通势

يعبر المصطلح الصيني *勾股通势* الأشكال المتقابلة للوتر والقائمة عن مبدأ المثلثات القائمة المتشابهة. الـ *勾* هو القاعدة، والـ *股* هو الارتفاع، والـ *弦* هو الوتر. عندما يتشارك مثلثان قائمان زاوية حادة، فإن أضلاعهما المتقابلة متناسبة: $\frac{\text{قاعدة}_1}{\text{قاعدة}_2} = \frac{\text{ارتفاع}_1}{\text{ارتفاع}_2} = \frac{\text{وتر}_1}{\text{وتر}_2}$.

هذا المبدأ، المكافئ لما دعا إقليده خاصية المثلثات المتشابهة العناصر س٦.٤، استُخدم على نطاق واسع في المساحة الصينية. تُختزل جميع مسائل القياس والمراقبة إلى إقامة التناسبات بين أزواج الوتر والقائمة المعروفة والمجهولة وحل الكمية غير المتاحة.

A.3 The Counting Rod System (筹算)

The counting rod system (chou suan, 筹算) was the primary computational tool in ancient Chinese mathematics. Numbers were represented by bamboo sticks arranged in a decimal place-value system on a counting board. This positional system enabled sophisticated algebraic computations including root extraction and solution of polynomial equations up to degree 10.

أ.٣ نظام الأعواد الحسابية 筹算

كان نظامُ الأعواد الحسابية 筹算 الأداةَ الحسابية الأساسية في الرياضيات الصينية القديمة. تُمثَّل الأرقام بعصي الخيزران مرتبة في نظام قيمة مكانية عشري على لوح حسابي. مكَّن هذا النظام الموقعي من عمليات جبرية متطورة تشمل استخراج الجذور وحل المعادلات متعددة الحدود حتى الدرجة العاشرة.

In the counting rod layout for root extraction, the positions were arranged in columns: shang (商, result/estimate), shi (实, dividend), fang (方, linear coefficient), lian (廉, intermediate coefficients), and yu (隅, unit coefficient). At each step of the computation, these values were updated according to the algorithm, with systematic place-value shifts.

في تخطيط الأعواد الحسابية لاستخراج الجذر، كانت المواضع مرتبة في أعمدة: *商* □النتيجة□التقدير□، و *实* □المقسوم□، و *方* □المعامل الخطي□، و *廉* □المعاملات الوسيطة□، و *隅* □المعامل الوحدي□. عند كل خطوة من الحساب، حُدِّثت هذه القيم وفق الخوارزمية، مع إزاحات منهجية للقيمة الموقعية.

A.4 Qin Jiushao's Generalization

Qin Jiushao's contribution to surveying mathematics was to unify the double-difference method with his general root-extraction technique (the "method of the celestial element," tian yuan shu). This allowed him to formulate surveying problems as polynomial equations of high degree and solve them systematically. His solution of a tenth-degree equation arising from a surveying problem (Problem 1 of this fascicle) stands as a remarkable achievement in medieval mathematics.

٤.أ تعميم تشين جيوشاو

كان إسهامُ تشين جيوشاو في رياضيات المساحة هو توحيد طريقة الاختلاف المزدوج مع تقنيته العامة لاستخراج الجذور □□□طريقة العنصر السماوي□□، 天元术□. هذا مكّنه من صياغة مسائل المساحة كمعادلات متعددة حدود من درجة عالية وحلها بشكل منهجي. يُعد حله لمعادلة من الدرجة العاشرة الناشئة عن مسألة مساحة □المسألة الأولى من هذا الجزء□ إنجازاً ملحوظاً في الرياضيات الوسطى.

End of Fascicle IV / □□□□□ □□□□□ □□□□□□

Shu Xue Jiu Zhang —Juan 4 Shang, Juan 4 Xia / 数学九章—卷四上，卷四下

كتاب المسائل التسع في الحساب —الجزء الرابع أ والرابع ب

Yang Hui, Xiangjie Jiuzhang Suanfa, Arabic translation part 1

Arabic Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - Arabic Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.

titlecolor

/

/

commentarycolor

commentarycolor

commentarycolor

commentarycolor

commentarycolor

tioncolor **:**

[ ]

[ ]

:

[ ]

[ ]

:

:

:

:

[ ]

[ ]

:

[ ]

[ ]

:

:

:

:

tioncolor **:**

[ ]

[ ]

:

[ ]

[ ]

:

[ ]

[ ]

:

:

:

:

tioncolor **:**

[ ]

[ ]

:

[ ]

[ ]

:

:

:

:

:

tioncolor **:**

[ ]

[ ]

:

[ ]

]

[

:

:

:

:

ncolor

tioncolor

ncolor

tioncolor

oncolor

tioncolor

/

commentarycolor

com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
:
)
(
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
)
(
)
(
:
[ ]
[ ]
:
:
sheng.
sheng.
:
:
[ ]
]
[
:
:
[ ]
]
[
:
:
)
(
:
[ ]
]
[
:
:
:
[ ]
]
[
:
:
[ ]
]
[
:
:
sheng.
sheng
sheng.
sheng
sheng.
:
[ ]
]
[
:
:

oncolor

tioncolor

tioncolor

ncolor

ncolor

/

commentarycolor

com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
:

)

(

com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or

oncolor

:

[ ]

]

[

:

:

:

:

:

ncolor

:

[ ]

]

[

:

:

:

:

ncolor

:

[ ]

]

[

:

:

:

:

:

:

oncolor

:

[ ]

]

[

:

:

)

(

sheng

olor

:

[ ]

]

[

:

:

:

acolor

:

[ ]

]

[

:

:

:

titlecolor

---

commentarycolor
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
;
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
;
commentarycolor
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
;
com-
men-
tary-
col-
or
;
com-
men-
tary-
col-
or

/
)
(
!
commentarycolor
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
com-
men-
tary-
col-
or
;
com-
men-

Jamshid al-Kashi, Miftah al-Hisab, Arabic translation

Arabic Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - Arabic Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.

بسم الله الرحمن الرحيم

مفتاح الحساب

Miftah al-Hisab (Key to Arithmetic)

تأليف

Jamshid Ghiyath al-Din al-Kashi

(d. 832 AH / 1429 CE)

موسوعة شاملة في علم الحساب والهندسة والجبر

أتمها في سمرقند سنة 829 هـ

نسخة عربية مصححة مع الصيغ الرياضية

Arabic Edition with Mathematical Formulas

Contents

تمهيد

-2-2 في ذكر تأليف هذا الكتاب ومؤلفه

هذه النسخة تقدم المحتوى الكامل لكتاب مفتاح الحساب، الذي يعدُّ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ في تاريخ الحساب الإسلامي، ألَّفه العالم الفارسي المشهور جمال الدين الكاشي سنة 1427 م.

الكاشي □حوالي 1429□1380 م□ كان عالم الفلك المقيم في مرصد أولوغ بيك في سمرقند. وكتابه مفتاح الحساب هو موسوعة شاملة تغطي ثلاثة مواضيع رئيسية: الحساب، والهندسة، والجبر.

يتألف الكتاب من خمس مقالات تتناول:

1. حساب الأعداد الصحيحة
2. حساب الكسور □بما في ذلك الكسور العشرية□
3. حساب الأعداد الستينية
4. الهندسة والمساحات
5. الجبر والمقابلة

يحتوي الكتاب على الحساب المشهور للكاشي لقيمة π إلى 16 منزلة عشرية، ومعالجته المنظمة للكسور العشرية □الأولى في التاريخ□، وطرق استخراج الجذور التي سبقت الطرق الأوروبية المماثلة بقرون.

تقديم المؤلف

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي توحد بإبداع الآحاد، وتفرد بتأليف صنوف الأعداد، وصلاة على خير خلقه محمد أشفع الشافعين يوم التناد، وآله وأولاده الهادين إلى سبيل النجاة والرشاد.

أمّا بعد فإن أحوج خلق الله تعالى إلى عفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي الملقب بغياث الدين □□2□2 أحسن الله أحواله □ يقول: لما مارست الأعمال الحسابية والقوانين الهندسية حتى بلغت إلى حقائقها، وبالغت في دقائقها، وكشفت غوامضها ومعضلاتها وحللت مشكلاتها، واستنبطت كثيراً من القوانين والضوابط فيها، واستخرجت ما صعب استخراجه على كثير من مباشريها...

وجدت في سير هذه الأعمال قوانين كثيرة يمكن بها أعمال مباني الحساب على أيسر وجه وأهون طريق وأقل تعب وأعظم نفع وأوضح ترتيب، فعزمت على تدوينها وشرحها، لتكون ذكرى للأحباء وإرشاداً لأهل الفهم والفطنة.

الترجمة: □ □□□□□□□□□□□□

□□ □□□ □□□□ □□ □□□، □□□ □□□□□□□□، □□□ □□□□□□□□□□□□□□.

□□□□□□ □□ □□ □□□، □□□ □□ □□□□□□ □□ □□□□□□□□□ □□□□□، □□□ □□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□ □□ □□□□□□□. □□□ □□□□□□□□□□ □□□□ □□□ □□□□ □□ □□□ □□□□□□□□، □□□□□□□□، □□□ □□□□□□□□□□□□ □□□ □□□ □□□□□□□□□□□ □□ □□□ □□□ □□ □□□□□□□، □□□ □□□□ □□□ □□□□□□ □□□ □□□ □□□□ □□□ □□□□□ □□ □□□ □□□□ □□ □□□□□□□□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□□□.

□□□□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□، □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□ □□□ □□□ □□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□ □□□□:

□□□□ □ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□ □ □□□□□□□ □□□□□ □□□□ □□□□□□□□□□□، □□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□، □□□ □□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□ □□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□، □□□ □□□□□□□□ □□□□ □□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□، □□□ □□□□□□□□□□ □□□□ □□□ □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□ □□□ □□□□ □□ □□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□...

[illegible]

فهرس الكتاب الأصلي

فصل في مباني علم الحساب وبيان أسمائه.

المقالة الأولى في حساب الأعداد الصحيحة. وهي سبعة فصول.

المقالة الثانية في حساب الكسور المتصلة والمنفصلة والكسورية.

المقالة الثالثة في حساب الدرج والدقائق والثواني ونحوها.

المقالة الرابعة في حساب المساحات والأحجام.

المقالة الخامسة في الجبر والمقابلة.

يتألف الكتاب من خمس مقالات رئيسية:

المقالة		الرقم
حساب الأعداد الصحيحة	سبعة فصول	الأولى
حساب الكسور	عشرة فصول	الثانية
حساب الأعداد الستينية	عشرة فصول	الثالثة
حساب المساحات والأحجام	تسعة فصول	الرابعة
الجبر والمقابلة	عدة فصول	الخامسة

Chapter 1

المقالة الأولى: حساب الأعداد الصحيحة

المقالة الأولى في حساب الأعداد الصحيحة 2□2

هذه المقالة هي أساس العمل كله، وتتألف من سبعة فصول تغطي جميع العمليات على الأعداد الصحيحة:

فصل 1: في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها □ نظام الأرقام الهندية□العربية ومبدأ قيمة المكان.

فصل 2: في الجمع □ طرق جمع الأعداد الصحيحة.

فصل 3: في الطرح □ تقنيات إيجاد الفروق.

فصل 4: في الضرب □ بما في ذلك طريقة الشبكة، وطريقة الأعمدة، وطريقة المتمم.

فصل 5: في القسمة □ بما في ذلك القسمة المطولة والطرق المختصرة.

فصل 6: في استخراج الجذور □ الجذور التربيعية وجذور الدرجات العليا بطريقة عامة.

فصل 7: في إيجاد المجهولات بالجبر □ تطبيقات أولية.

1.1 الفصل الأول: في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها

فصل في التعريف بالأعداد وأسمائها ومنازلها 2□2

يبدأ الكاشي بشرح نظام المنازل العشري، نسبته إلى الهنود وملاحظة انتقاله إلى العالم الإسلامي. ويصف أسماء منازل القيمة:

القوة	الاسم العربي	□□□□□□□
10^0	□الوحدات□ واحد	□□□□□
10^1	عشرة	□□□□

القوة	الاسم العربي	[redacted]
10^2	مئة	[redacted]
10^3	ألف	[redacted]
10^4	عشرة آلاف	[redacted]
10^5	مئة ألف	[redacted]
10^6	مليون [redacted] ألف ألف	[redacted]
10^7	عشرة ملايين	[redacted]
10^8	مئة مليون	[redacted]
10^9	مليار [redacted] ألف مليون	[redacted]

امتد الكاشي بهذا النظام إلى ما كان شائعاً في زمنه، مما مكّنه من إجراء العمليات الحسابية الكبيرة التي استخدمها لاحقاً في حساباته الفلكية.

1.2 الفصل الرابع: في الضرب وطرقه

فصل في الضرب وطرقه	2[redacted]2

يقدم الكاشي عدة طرق للضرب. أشهرها هي طريقة الشبكة [redacted]الشبكة أو ضرب الجدول[redacted]، التي يصفها بالتفصيل الكامل. ويقدم أيضاً طريقة الأعمدة وطرق الحساب الذهني.

طريقة ضرب الشبكة:

1. ارسم شبكة من المربعات بعدد صفوف وأعمدة يساوي عدد أرقام المضروب والمضروب فيه.
2. اكتب المضروب فوق الشبكة والمضروب فيه على يمينها.
3. اقسم كل مربع قطرياً من أعلى يسار إلى أسفل يمين.
4. اضرب كل رقم من المضروب في كل رقم من المضروب فيه، واكتب العشرات فوق القطر والوحدات تحته.
5. اجمع على طول كل قطر من أسفل يمين إلى أعلى يسار، مع النقل عند الحاجة.
6. اقرأ الناتج النهائي على طول الحافتين اليسرى والسفلى.

مثال لضرب 524×385:

	5	2	4
3	1[redacted]5	0[redacted]6	1[redacted]2
8	4[redacted]0	1[redacted]6	3[redacted]2
5	2[redacted]5	1[redacted]0	2[redacted]0

النتيجة: $\boxed{524 \times 385 = 201{,}740}$

1.3 الفصل السادس: في استخراج الجذور

فصل في استخراج الجذور	2□2□

تُعدُّ طريقة الكاشي في استخراج الجذور من أشهر أجزاء المفتاح. يقدم خوارزمية عامة لإيجاد الجذر الـn لأي عدد، وهي طريقة مكافئة لما يُعرف الآن بـطريقة روفيني□هورنر □رغم أن الكاشي سبقهما بقرون□.

الطريقة العامة لاستخراج الجذر الـn:
$\sqrt[n]{N}$: بعدد N وعدد صحيح n، لإيجاد

1. افصل N إلى مجموعات من n أرقام من العلامة العشرية.
2. أوجد أكبر عدد صحيح a بحيث أن a^n لا يتجاوز المجموعة الأولى.
3. اطرح a^n من المجموعة الأولى، ثم انزل بالمجموعة التالية.
4. باستخدام التوسيع ذي الحدين لـ $(a+b)^n$، أوجد الرقم التالي b بقسمة الباقي على $n \cdot a^{n-1}$.
5. كرر حتى الوصول إلى الدقة المطلوبة.

بالنسبة لـ الجذر التربيعي $(n = 2)$، يختزل هذا إلى:

استخراج الجذر التربيعي:

1. افصل العدد إلى أزواج من الأرقام من العلامة العشرية.
2. أوجد أكبر مربع لا يتجاوز الزوج الأيسر؛ هذا يعطي الرقم الأول من الجذر.
3. اطرح مربعه وانزل بالزوج التالي.
4. اضعف الجذر الحالي، وأوجد رقماً بحيث أن $(20 \times \text{الحالي} + d) \times d$ لا يتجاوز الباقي.
5. كرر حتى معالجة جميع الأزواج.

مثال: $\sqrt{144} = 12$

$$1^2 = 1 \quad \text{□الرقم الأول□}$$
$$(20 \times 1 + 2) \times 2 = 44$$
$$44 = 44 \quad \checkmark \quad \text{□الرقم الثاني□}$$

Chapter 2

المقالة الثانية: حساب الكسور

المقالة الثانية في حساب الكسور	2□2□

هذه المقالة هي الأكثر أهمية تاريخياً في المفتاح، فهي تحتوي على أول معالجة منظمة للكسور العشرية في تاريخ الرياضيات. كما لاحظ يوشكيفتش وروزنفيلد: □□إننا نرى في عمل غياث الدين جمشيد الكاشي في أوائل القرن الخامس عشر، لأول مرة، السيطرة الكاملة على فكرة الكسور العشرية وطريقة ملائمة لكتابتها.□□

2.1 الفصول العشرة للمقالة الثانية

1: فصل في تسمية الكسور □ التعريفات والمصطلحات للكسور المشتركة.

2: فصل في تسطيح الكسور □ التحويل إلى مقامات مشتركة.

3: فصل في جمع الكسور وطرحها.

4: فصل في ضرب الكسور.

5: فصل في قسمة الكسور.

6: فصل في التحويل بين الكسور □ بما في ذلك الستيني إلى العشري والعكس.

7: فصل في استخراج جذور الكسور.

8: فصل في كسر الأعداد □ صنف خاص من الكسور.

9: فصل في الكسور العشرية □الكسر العشري□ □ الإنجاز الأعظم.

10: فصل في استعمال الكسور العشرية في الحسابات.

2.2 الفصل التاسع: في الكسر العشري

الباب التاسع في الكسر العشري واستعماله	2□2□

قدّم الكاشي الكسور العشرية بوضوح وعمومية لم يسبق لهما مثيل. واستخدم في تدوينه خطاً رأسياً للفصل بين الجزء الصحيح والجزء الكسري. على سبيل المثال، كان يكتب:

$$\boxed{3\,|\,14159265\ldots}$$

للدلالة على $3.14159265\ldots$، حيث الأرقام بعد الخط الرأسي تعني الأعشار والمئات والآلاف وهكذا.

يكتب الكاشي:

> اعلم أن العوام يسمون المنزلة الأولى بعد الوحدات منزلة أجزاء العشرة، والثانية منزلة أجزاء المئة، والثالثة منزلة أجزاء الألف، وهكذا مضاعفة في العشرة دائماً. وقد وجدنا مناسباً أن نسمي المنزلة الأولى بعد العلامة العشرية منزلة العشر الأول، والثانية منزلة العشر الثاني، وهكذا.

2.2.1 نظام تدوين الكاشي

كان تدوين الكاشي للكسور العشرية متقدماً بشكل ملحوظ. يكتب الجزء الصحيح، ثم فاصلة، ثم أرقام الكسر. على سبيل المثال:

القيمة	التدوين الحديث	تدوين الكاشي
ثلاثة عشر وسبعة آلاف وخمسمئة وتسعة وثلاثون جزءاً من عشرة آلاف	13.7539	١٣ ٧٥٣٩
تقريب لـ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	0.14142135	٠ ١٤١٤٢١٣٥
تقريب لـ π	3.1415926535	٣ ١٤١٥٩٢٦٥٣٥

2.2.2 العمليات على الكسور العشرية

يستعرض الكاشي العمليات الأربع على الكسور العشرية. للضرب يقدم القاعدة التالية:

ضرب الكسور العشرية:

1. اضرب العددين كما لو كانا أعداداً صحيحة، متجاهلاً الفاصلة العشرية.
2. في الناتج، اعتبر من اليمين عدداً من المنازل يساوي مجموع المنازل العشرية في المضروب والمضروب فيه.
3. ضع الفاصلة في ذلك الموضع.

مثال: $0.25 \times 0.4 = 0.10$

- الضرب كأعداد صحيحة: $25 \times 4 = 100$
- مجموع المنازل العشرية: $2 + 1 = 3$
- النتيجة: $0.100 = 0.1$

2.2.3 أهمية الكسور العشرية

استخدم الكاشي الكسور العشرية على نطاق واسع في حساباته الفلكية. وقد تحوّل بسهولة بين النظامين الستيني والعشري. كما لاحظ كينيدي: كان الكاشي قبل كل شيء سيد حساب ذو قدرة استثنائية، تشهد على ذلك براعته في استخدام الستينيات المجردة، وتطبيقه الواسع للخوارزميات التكرارية، وبراعته في ترتيب الحساب بحيث يتحكم في الحد الأقصى للخطأ ويحافظ على التحقق في جميع المراحل.

التحويل من الستيني إلى العشري:
لتحويل عدد ستيني $N = a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \cdots$ إلى عشري:

1. احتفظ بالجزء الصحيح a كما هو.
2. حوّل كل كسر ستيني: اقسم على 60، 60^2، إلخ.
3. اجمع النتائج في الشكل العشري.

حوّل مثال: $3; 8, 29, 44$ ستيني إلى عشري:

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3.141592\ldots$$

Chapter 3

المقالة الثالثة: حساب الدرج والدقائق والثواني

المقالة الثالثة في حساب الدرج والدقائق والثواني 2 2

تُكرَّس هذه المقالة للنظام الستيني الأساس 60، الذي كان النظام القياسي للحسابات الفلكية في العالم الإسلامي. يكتب الكاشي:

> اعتمد علماء الفلك النظام الستيني لما يقبله من أنواع التقسيمات الكثيرة، إذ الستون تقبل القسمة على اثنين وثلاثة وأربعة وخمسة وستة وعشرة واثني عشر وخمسة عشر وعشرين وثلاثين. ولحاجتهم إلى استعمال الكسور في حساباتهم، قسّموا الدائرة إلى ثلاثمئة وستين درجة، كل درجة إلى ستين دقيقة، كل دقيقة إلى ستين ثانية، وهكذا بلا نهاية.

3.1 فصول المقالة الثالثة

في تسمية منازل الستينية الدرج درجة، والدقائق دقيقة، والثواني ثانية، والثوالث ثالثة، إلخ. 1: فصل

في جمع الأعداد الستينية وطرحها. 2: فصل

في ضرب الأعداد الستينية. 3: فصل

في قسمة الأعداد الستينية. 4: فصل

في استخراج جذور الأعداد الستينية. 5: فصل

في تحويل الستيني إلى أنظمة أخرى. 6: فصل

في الحسابات الفلكية. 7: فصل

في العمليات بالجيب والوتر. 8: فصل

3.2 تدوين النظام الستيني

استخدم الكاشي التدوين التالي للأعداد الستينية. في التدوين الحديث، نكتب $a; b, c, d$ لتمثيل:

$$a + \frac{b}{60} + \frac{c}{60^2} + \frac{d}{60^3}$$

المصطلح العربي	[illegible]	الرمز	القيمة
درجة	[illegible]	$^\circ$ [illegible]	$60^0 = 1$
دقيقة	[illegible]	$'$	60^{-1}
ثانية	[illegible]	$''$	60^{-2}
ثالثة	[illegible]	$'''$	60^{-3}
رابعة	[illegible]		60^{-4}
خامسة	[illegible]		60^{-5}

3.3 الفصل الخامس: في استخراج جذور الأعداد الستينية

يحتوي هذا الفصل على الطريقة العامة الملحوظة للكاشي في استخراج الجذور من الدرجة n في النظام الستيني. أظهرت دراسة داخل [illegible]1960 أن طريقة الكاشي هي في جوهرها نفسها طريقة روفيني[illegible]هورنر.

استخراج الجذر في النظام الستيني:
في النظام الستيني: $\sqrt[n]{N}$ لإيجاد

1. عبّر عن N في الشكل الستيني: $N = N_0; N_1, N_2, N_3, \ldots$
2. جمّع منازل الستينية بشكل ملائم لدرجة الجذر.
3. طبق الطريقة ذات الحدين تكرارياً:

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{n \cdot a^{n-1}}$$

4. في كل خطوة، صحّح التقريب باستخدام حد الخطأ.
5. استمر حتى الوصول إلى الدقة المطلوبة.

مثال [illegible] الجذر التربيعي في النظام الستيني:
في النظام الستيني. يعطي الكاشي: $\sqrt{2}$ أوجد

$$\sqrt{2} \approx 1; 24, 51, 10, 7, 46, 6, 4, 40, \ldots$$

وهو ما يقابل:

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \cdots \approx 1.41421356\ldots$$

هذا التقريب لـ $\sqrt{2}$ دقيق لحدود الحساب. طريقة استخراج الجذور للكاشي كلية العموم وتعمل لأي درجة من الجذور في أي أساس للأعداد.

Chapter 4

المقالة الرابعة: حساب المساحات والأحجام

المقالة الرابعة في حساب المساحات والأحجام

هذه هي أطول وأكثر المقالات تنوعاً في المفتاح، وتغطي الهندسة المستوية والمجسمة، مع تطبيقات على المساحة والعمارة والهندسة. تتألف من تسعة أبواب مع فصول عديدة.

4.1 فهرس المقالة الرابعة الأصلي

فصل في المساحة وألفاظها.

الباب الأول: في مساحة المثلث وما يتعلق به.

الباب الثاني: في مساحة الرباعي وما يتعلق به.

الباب الثالث: في مساحة المضلع وما يتعلق به.

الباب الرابع: في مساحة الدائرة وما يتعلق بها.

الباب الخامس: في مساحة الأجسام المستوية.

الباب السادس: في مساحة الأجسام المحدبة.

الباب السابع: في أحجام الأجسام.

الباب الثامن: في نسبة حجم الجسم إلى وزنه وعكس ذلك.

الباب التاسع: في مساحة البنيان والأبنية.

4.2 الباب الأول: في مساحة المثلث

فصل في مساحة المثلث	2□2□

4.2.1 تصنيف المثلثات

يصنّف الكاشي المثلثات حسب أضلاعها □متساوي الأضلاع، متساوي الساقين، مختلف الأضلاع□ وحسب زواياها □حادّة، قائمة، منفرجة□، مع إعطاء تعريفات هندسية لكل صنف.

4.2.2 قواعد المساحة

يقدم الكاشي عدة طرق لحساب مساحة المثلث:

مساحة المثلث:
الطريقة الأولى □ القاعدة والارتفاع:

$$A = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

الطريقة الثانية □ قانون هيرون: ونصف محيطه c ،b ،a لمثلث أضلاعه $s = \frac{a+b+c}{2}$:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

الطريقة الثالثة □ ضلعان والزاوية المحصورة:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin C$$

مثال: أوجد مساحة مثلث أضلاعه 13، 14، 15.

$$\begin{aligned} s &= \frac{13+14+15}{2} = 21 \\ A &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = \sqrt{7056} = 84 \end{aligned}$$

4.3 الباب الرابع: في مساحة الدائرة

فصل في مساحة الدائرة ومعرفة محيطها من قطرها وعكس ذلك	2□2□

يحتوي هذا الباب على أحد أشهر المقاطع في المفتاح: بيان الكاشي لقيمة π. يكتب:

> اعلم أن المحيط ثلاثة أمثال القطر وكسر، وهو أقل من سُبع القطر، لكن الناس يأخذونه سُبعاً لتسهيل الحساب. وقال أرخميدس إن هذا الكسر أقل من سُبع وأكثر من عشرة من واحد وسبعين. وحسب ما حصلناه وذكرناه في مقالتنا المسماة □□المحيطية□□ في نسبة المحيط إلى القطر، فهو $3; 8' 29'' 44'''$ ثوالث بعد حذف رابعات

وما بعدها، إذا كان القطر واحداً. وهذا أدق بكثير من حساب أرخميدس كما بيّنّا في المقالة المذكورة، وهو أقرب إلى القيمة الصحيحة. إلا أنه لا يعلمه على التحقيق إلا الله تعالى.

في التدوين الحديث:

$$\pi \approx 3 + \frac{8}{60} + \frac{29}{60^2} + \frac{44}{60^3} = 3.14159259259\ldots$$

قيمة π هذه دقيقة حوالي 7 منازل عشرية. أما جوهرة الكاشي في رسالة المحيطية فتمتد إلى 16 منزلة عشرية، محسوبة باستخدام مضلع له $3 \times 2^{28} = 805{,}306{,}368$ ضلعاً.

4.3.1 مساحة الدائرة والقواعد المتعلقة بها

يقدم الكاشي القواعد القياسية:

قواعد الدائرة:

$$C = \pi d = 2\pi r \qquad \text{المحيط}$$

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad \text{المساحة}$$

إيجاد القطر من المحيط:

$$d = \frac{C}{\pi}$$

يلاحظ الكاشي الحدود الكلاسيكية: حدود أرخميدس:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

أي:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

4.4 حساب الكاشي لقيمة π رسالة المحيطية

رسالة المحيطية في إيجاد نسبة المحيط إلى القطر 2 2

يُعدُّ حساب الكاشي لقيمة π إلى 16 منزلة عشرية إنجازاً ملحوظاً في تاريخ الرياضيات. تجاوز هذا الحساب جميع الأرقام السابقة ولم يُتَجاوَز في أوروبا قرابة قرنين.

4.4.1 الطريقة

استخدم الكاشي الطريقة الكلاسيكية لأرخميدس: إحاطة المضلعات المنتظمة بالدائرة وحساب محيطاتها. بدءاً بالسداسي ومضاعفة عدد الأضلاع 28 مرة، حصل على تقريبه.

طريقة الكاشي لحساب π:
بدءاً بسداسي منتظم محاط بدائرة وحدة:

1. ضلع السداسي نصف القطر $c_0 = 1$ الوتر الابتدائي:
2. في كل خطوة، بُعْد الوتر c_n للمضلع nي، احسب الوتر c_{n+1} للمضلع $2n$ي بـ:

$$c_{n+1}^2 = 2 - \sqrt{4 - c_n^2}$$

3. $P_N = N \cdot c_N$. ي هو N محيط المضلع المحاط
4. التقريب لـ π هو $\pi \approx \frac{P_N}{2}$.
5. ضلعاً. 3×2^{28} كرر 28 مرة للحصول على المضلع ذي

4.4.2 النتيجة

عبر الكاشي أولاً عن 2π في التدوين الستيني:

$$2\pi = 6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50$$

وهو ما يعني:

$$6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}$$

ثم حوّل هذا إلى العشري:

$$2\pi = 6.2831853071795865\ldots$$

وبالتالي:

$$\boxed{\pi = 3.1415926535897932\ldots}$$

قيمة π	التاريخ	المصدر
3.14185	حوالي 250 ق.م	أرخميدس
$3.14166\ldots$ $3; 8, 30$	حوالي 150 م	بطليموس
$\mathbf{3.1415926535897932}\ldots$	1424 م	الكاشي
20 منزلة	1610 م	فان كولن
100 منزلة	1706 م	ماشين

دقة الكاشي: لحساب 2π بـ 9 منازل ستينية يعني أن الخطأ الأقصى أقل من $1/60^9 \approx 9.92 \times 10^{-17} < 10^{-16}$. أي أن الكاشي حسب 2π بدقة تصل إلى المنزلة العشرية السادسة عشرة.

4.5 الباب التاسع: في مساحة البنيان والأبنية

الباب التاسع في مساحة البنيان والأبنية	22

هذا الباب ذو اهتمام خاص لمؤرخي العمارة الإسلامية. يكتب الكاشي:

> إن أهل هذه الصنعة لم يذكروا إلا القبب والأقوس، وحتى ذلك لم يُذكَر على وجهه. فأتناولها هنا على وجهها الصحيح مع غيرها، لأن الحاجة في قياسات البنيان أكثر طلباً.

4.5.1 مساحة القبب والأقوس

يُعرّف الكاشي القبّة الحقيقية [القبو الحقيقي] بأنها بناء على قاعدتين بين خطين متوازيين، مؤلفة من خمس قطع: قسمان من قشرة كروية [أو حلقة أو دف] قطرها الفارغ ليس أصغر من فسحة القبو، وقسمان آخران بقطر فارغ أكبر.

4.5.2 مساحة القبة

لقبة قطرها d وارتفاعها h، يعطي الكاشي:

$$A_{\text{قبة}} = 2\pi r h$$

حيث r هو نصف قطر كرة الأساس.

4.5.3 مساحة سطح المقرنص

فصل في مساحة سطح المقرنص	2[2]

المقرنص [مقرنص] هو عنصر معماري زخرفي في العمارة الإسلامية، يتألف من طبقات من الأجراف المشبّكة التي تخلق تأثير قرص العسل أو المعلقات على الأسقف والزوايا والسطوح الداخلية للقبب. يصف الكاشي أربعة أنواع من المقرنص ويعطي قواعد لحساب مساحة سطحها، حتى يتمكن المعماريون من تحديد كمية المواد المطلوبة.

مساحة سطح المقرنص:
لمقرنص بسيط مؤلف من n طبقة، كل طبقة متوسط مساحتها a_i:

$$A_{\text{الكلية}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \times f_i$$

حيث f_i هو معامل الشكل المعتمد على نوع خلية المقرنص.

لقد دُرست هذه الفقرة على نطاق واسع من قبل مؤرخي العمارة الإسلامية. يمثل المقرنص واحداً من أكثر التطبيقات تطوراً للهندسة في الفن والعمارة الإسلامية.

Chapter 5

المقالة الخامسة: الجبر والمقابلة

المقالة الخامسة في الجبر والمقابلة 2□2

تُكرِّس المقالة الأخيرة من المفتاح للجبر □الجبر والمقابلة□. يقدم الكاشي معالجة منظمة للموضوع، مبنياً على عمل أسلافه □ وخاصة الخوارزمي، وأبو كامل، والكرجي، والسموأل □ مضيفاً ابتكاراته الخاصة.

5.1 فصول المقالة الخامسة

1: فصل في أنواع المعادلات □ الصور الست القانونية.

2: فصل في إيجاد المجهول بطريقة الخطأين □طريقة الخطأين□.

3: فصل في العمليات الجبرية □ جمع وطرح وضرب وقسمة التعابير الجبرية.

4: فصل في استخراج جذور التعابير الجبرية.

5: فصل في حل المعادلات من الدرجات العليا □ بما في ذلك المعادلات التكعيبية.

6: فصل في حل المسائل □ مسائل تطبيقية تحل بالجبر.

5.2 الفصل الأول: الصور الست القانونية

يصنّف الكاشي، متبعاً التقاليد التي أسسها الخوارزمي، جميع المعادلات في ستة أنواع. باستخدام التدوين الحديث مع x كمجهول و a, b كمعاملات موجبة:

	الصورة	المعادلة	الاسم
1	$ax = b$		مبسط
2	$ax^2 = bx$		مربعات تساوي جذوراً
3	$ax^2 = b$		مربعات تساوي أعداداً
4	$ax^2 + bx = c$		مربعات وجذور تساوي أعداداً
5	$ax^2 + c = bx$		مربعات وأعداد تساوي جذوراً

الاسم	المعادلة	الصورة
جذور وأعداد تساوي مربعات	$bx + c = ax^2$	6

الصورة الرابعة: حل $ax^2 + bx = c$
اقسم على a: $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$

أكمل المربع:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

وبالتالي:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$$

الحل:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

5.3 الفصل الثاني: طريقة الخطأين

فصل في استخراج المجهول بطريقة الخطأين	22

طريقة الخطأين طريقة الخطأين هي طريقة قديمة لحل المسائل الخطية بدون جبر. يقدم الكاشي بياناً واضحاً:

طريقة الخطأين:
اجعل تخمينين g_1 و g_2، تعطيان نتيجتين f_1 و f_2 مع أخطاء $e_1 = c - f_1$ و $e_2 = c - f_2$. لمسألة من الشكل $ax + b = c$، فإن:

$$x = \frac{g_1 e_2 - g_2 e_1}{e_2 - e_1}$$

مثال: كمية بحيث إذا جمعت ثلثها مع ربعها، كانت النتيجة 14. ما هي الكمية؟

التخمين $g_1 = 12$: $\frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 4 + 3 = 7$، الخطأ $e_1 = 14 - 7 = 7$

التخمين $g_2 = 24$: $\frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 8 + 6 = 14$، الخطأ $e_2 = 14 - 14 = 0$

$$x = \frac{12 \cdot 0 - 24 \cdot 7}{0 - 7} = \frac{-168}{-7} = 24$$

5.4 الفصل الخامس: في حل المعادلات التكعيبية

يقدم الكاشي طرقاً لحل المعادلات التكعيبية. للمعادلة $x^3 + px = q$، يستخدم طريقة تكرارية:

الحل التكراري لـ $x^3 + px = q$:
أعد الترتيب: $x = \sqrt[3]{q - px}$

التكرار:
1. ابدأ بتخمين أولي x_0.
2. احسب $x_{n+1} = \sqrt[3]{q - px_n}$.
3. كرر حتى $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

حل مثال: $x^3 + 2x = 20$
ابدأ بـ $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{16} \approx 2.52 \\
x_2 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.52} = \sqrt[3]{14.96} \approx 2.466 \\
x_3 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.466} = \sqrt[3]{15.068} \approx 2.472 \\
x_4 &= \sqrt[3]{20 - 2 \cdot 2.472} = \sqrt[3]{15.056} \approx 2.471
\end{aligned}$$

الحل: $\boxed{x \approx 2.471}$

هذه الطريقة التكرارية لحل المعادلات التكعيبية هي في جوهرها ما يُعرف الآن بـتكرار النقطة الثابتة. استخدم الكاشي نهجاً مماثلاً في رسالة الوتر والجيب لحساب $\sin(1^\circ)$ بدقة غير مسبوقة.

Chapter 6

الجداول في مفتاح الحساب

يلاحظ الكاشي في تقديمه:

> وضعت لأكثر العمليات نموذجاً على هيئة جدول لتكون أسهل فهماً لذوي الفطنة. وجميع الجداول الموضوعة في هذا الكتاب □ □□عذري صراحتي، وحلوها ومرها مني□□ □ إلا سبعة جداول.

6.1 الجداول السبعة المساعدة

جدول 1: جدول حواصل الأعداد دون العشرة □ جدول ضرب أساسي.

جدول 2: جدول الشبكة للضرب □ مساعد لضرب الجدول.

جدول 3: جدول قوى المنازل □ مرجع لقيمة المكان.

جدول 4: جدول مثال اتفاق الجذور □ مرجع لاستخراج الجذور.

جدول 5: جدول لمعرفة رتبة حاصل الضرب والمقسوم □ مساعد لحساب قيمة المكان.

جدول 6: جدول الجيوب □ ضروري للحسابات الفلكية.

جدول 7: جدول لمعرفة زوجي حاصل الضرب والقسمة □ تحديد زوجي□فردي.

6.2 نموذج: جدول الضرب □الجدول 1□

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Appendix A

نبذة عن حياة الكاشي

جمال الدين غياث الدين بن مسعود بن محمود الطبيب الكاشي، وُلد في كاشان، في وسط إيران، حوالي سنة 1380 م. اسمه جمشيد؛ اسم أبيه مسعود واسم جده محمود. يُعرف بالكاشي □أو بالأحرى الكاشاني، من كاشان□، وبلقبه غياث الدين □□□مجير الدين□□□.

A.1 تواريخ رئيسية في حياة الكاشي

الحدث	التاريخ
وُلد في كاشان، إيران	حوالي 1380 م
أتم سلم السماء	1407
كتب مختصر في علم الهيئة	1410□11
أتم زيج الخاقاني، مهدى إلى أولوغ بيك	1413□14
انتقل إلى سمرقند بدعوة من أولوغ بيك	حوالي 1420
أتم رسالة المحيطية □حساب π□	1424
أتم مفتاح الحساب	2 مارس 1427
كتب رسالة الوتر والجيب □$\sin 1^\circ$□	1429
توفي في سمرقند □19 رمضان 832 هـ□	22 يونيو 1429

A.2 مؤلفات الكاشي الأخرى

1. □1407□ □ في حل صعوبات تحديد المسافات وأحجام الأجرام السماوية. سلم السماء
2. □1410□11□ □ عمل فارسي في علم الفلك. مختصر في علم الهيئة
3. □1413□14□ □ مهدى إلى أولوغ بيك. زيج الخاقاني
4. □1424□ □ حساب π إلى 16 منزلة عشرية. رسالة المحيطية
5. □1429□ □ حساب $\sin(1^\circ)$ بدقة غير مسبوقة. رسالة الوتر والجيب
6. □ في بناء واستخدام آلة طبق المناطق. نزهة الحدائق
7. □ جداول فلكية مبسطة. زيج التسهيلات

بكلمات إ. س. كينيدي: "كان الكاشي قبل كل شيء سيد حساب ذو قدرة استثنائية، تشهد على ذلك براعته في استخدام الستينيات المجردة، وتطبيقه الواسع للخوارزميات التكرارية، وبراعته في ترتيب الحساب بحيث يتحكم في الحد الأقصى للخطأ ويحافظ على التحقق في جميع المراحل."

Appendix B

شهادات العلماء المعاصرين

[illegible] .[illegible]

[illegible] .[illegible] [illegible]

[illegible] 1948 [illegible] .[illegible]

[illegible] .[illegible] [illegible]

[illegible] .[illegible] [illegible] .[illegible] [illegible]

[illegible] .[illegible]

[illegible] .[illegible] [illegible]

[illegible] .[illegible]

[illegible] .[illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible] .[illegible]

[illegible] π, [illegible]

[illegible] .[illegible]

[illegible]

[illegible] .[illegible]

Appendix C

النصوص والطبعات

حُفظ مفتاح الحساب في نسخ مخطوطة عديدة، مما يدل على أهميته واستخدامه الواسع. النصوص المخطوطة الرئيسية تشمل:

الموقع	التاريخ	المخطوطة
إسطنبول، مكتبة نور عثمانية	854 هـ □ 1450 م	2967 □□□□□□□□□□□□□
إسطنبول، مكتبة سليمانية	882 هـ □ 1477 م	3768 □□□□□ □□□□□□□
إسطنبول، مكتبة سليمانية	889 هـ □ 1484 م	256 □□□□□□□ □□□□□□
إسطنبول، مكتبة سليمانية	896 هـ □ 1491 م	2713 □□□ □□□□□□
مكتبة جامعة لايدن	القرن 17	178 .□□□□□□□ □□

C.1 الطبعات المطبوعة

1. الطبعة الحاضرة، نُشرت في الدولة العثمانية. كانت أول طبعة مطبوعة للنص العربي الكامل. □ طبعة 1887 العربية
2. طبعة 1951 الألمانية □ □. □□□□□□□, □□□ □□□□□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□ □. □□□□□□□ □□□ □□□□.
3. طبعة 1960 الإنجليزية □ □. □□□□□□□, □□□ □□□□□□□□□□□ □□ □□□ □□□□ □□□□ □□ □□□ □□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□.
4. طبعة 1969 العربية □ □.□. □□□□□□□□□□□□□ □□□ □.□. □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□, □□□□□□□□.
5. طبعة 1977 العربية □ □. □□□□□□□□, □□□□□□□.
6. ترجمة 1956 الروسية □ □.□. □□□□□□□□□□, □.□. □□□□□, □.□. □□□□□□□□□□□□□□□, □□□□□□□ □□□ □□□□□□□□□.

□□□ □□□ □□ □□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□ □□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□

تم ما انتقي من مفتاح الحساب لجمشيد الكاشي □ النسخة العربية

بسم الله الرحمن الرحيم

al-Khwarizmi, al-Jabr wa-l-Muqabala, Arabic translation

Arabic Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - Arabic Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.

□□□□□□□□□□□□□□

[illegible]

[illegible]

[illegible] 780–850 [illegible]

[illegible]

[illegible] 200 – 820 [illegible]

---

with: prepared edition enhanced This

[illegible]

of edition critical the on Based

[illegible] 1939, [illegible]

[illegible]

[illegible] 820 [illegible]

[illegible] 1359 [illegible], 1939 [illegible] 743 [illegible] 214, [illegible] 1342 [illegible].

المحتويات

5 [illegible]

7 [illegible]

1 [illegible] **9**
1.1 [illegible] 10

2 [illegible] **11**
1.2 [illegible] 12
1.1.2 [illegible] 12
2.1.2 [illegible] 12
3.1.2 [illegible] 13
2.2 [illegible] 14
1.2.2 [illegible] 14
2.2.2 [illegible] 16
3.2.2 [illegible] 17

3 [illegible] **19**
1.3 [illegible] 20
2.3 [illegible] 10 [illegible] 21 [illegible] 22
3.3 [illegible] 3 [illegible] 4 [illegible] 23

4 [illegible] **25**
1.4 [illegible] 26

5 [illegible] **29**
1.5 [illegible] 29
2.5 [illegible] 29

6 [illegible] **31**

7 [illegible] **33**
[illegible] 33
[illegible] 34
[illegible] 34
[illegible] 35
[illegible] 35

[illegible] 35

8 [illegible] 37
[illegible] 37

[illegible] 39

9 [illegible] 43

10 [illegible] 45
1.10 [illegible] 45
2.10 [illegible] 46
3.10 [illegible] 46
4.10 [illegible] 47

11 [illegible] 49
[illegible] 49
[illegible] 50
[illegible] 51

ا [illegible] 53

ب [illegible] 55

[illegible] 57

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Из предыдущих глав мы знаем, что если случайная величина имеет биномиальное распределение, то мы можем вычислить вероятность того, что в n испытаниях ровно k раз произойдет событие A. Если n достаточно большое, то вычисление этой вероятности с помощью биномиальной формулы может быть трудоемким. Распределение Пуассона позволяет приближенно вычислять такие вероятности. Оно также полезно для моделирования случайных событий, которые происходят в определенном интервале времени или пространства, таких как количество звонков в колл-центр, количество аварий на дороге, количество мутаций в ДНК:

Пусть X — случайная величина, которая может принимать только целые неотрицательные значения.

Для любого k, мы определяем p_k как вероятность того, что X принимает значение k:

- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{1, 2, \ldots\}$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
- p_k — вероятность того, что X принимает значение k для всех k из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0$.

[illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] 833–813 г. — 218–198 г. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

باب 1

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1.1 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	x^2	[illegible]	[illegible] x^2 [illegible]
[illegible]	x	[illegible]	[illegible] x [illegible]
[illegible]	39	[illegible]	[illegible] c [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] x [illegible] x^2.

باب 2

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

[illegible] 1.2

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	$x = b/a$	$ax^2 = bx$	[illegible]
[illegible]	$x = \sqrt{c/a}$	$ax^2 = c$	[illegible]
[illegible]	$x = c/b$	$bx = c$	[illegible]

[illegible]: [illegible] 1.1.2

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$x^2 = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 5, \quad x^2 = 25$$
$$\tfrac{1}{3}x^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 12x = 144, \quad x = 12$$
$$5x^2 = 10x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2x = 4, \quad x = 2$$

[illegible] ax [illegible] $ax^2 = bx$, [illegible]: [illegible] $x = 0$ [illegible] $x = b/a$. [illegible] $x \neq 0$ [illegible].

[illegible]: [illegible] 2.1.2

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible]. [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$
$$5x^2 = 80 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16, \quad x = 4$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36, \quad x = 6$$

$x^2 =$ [illegible] a [illegible] $ax^2 = c$ [illegible]: [illegible] c/a, [illegible] $x = \sqrt{c/a}$.

[illegible]: [illegible] 3.1.2

[illegible]

[illegible]:

$$x = 3$$
$$4x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = 5, \quad x^2 = 25$$
$$\tfrac{1}{2}x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 20, \quad x^2 = 400$$

$x = c/b$ [illegible] b [illegible] $bx = c$ [illegible]: [illegible]

2.2 [illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	$ax^2 + bx = c$	[illegible]
[illegible]	$ax^2 + c = bx$	[illegible]
[illegible]	$bx + c = ax^2$	[illegible]

[illegible] $(x+p)^2 = q$ [illegible]

1.2.2 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$\boxed{x^2 + bx = c \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}}$$

[illegible]: $x^2 + 10x = 39 \Rightarrow x = \sqrt{25+39} - 5 = \sqrt{64} - 5 = 8 - 5 = 3$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $x^2 + bx = c$ [illegible] $(b/2)^2$ [illegible] $x^2 + bx + (b/2)^2 =$ [illegible]:

$$c + (b/2)^2$$

[illegible] $(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$ [illegible]:

$$x + b/2 = \sqrt{c + (b/2)^2}$$

[illegible] $x = \sqrt{(b/2)^2 + c} - b/2$:$b/2$ [illegible]

[illegible]!

2.2.2 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible]: [illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]. [illegible]. [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$x^2 + c = bx \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$x^2 + 21 = 10x \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2 = 3$ [illegible] 7 [illegible]: [illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible]. [illegible]

[illegible]: [illegible]: $b^2 \geq 4c$ [illegible] $(b/2)^2 - c \geq 0$. [illegible]

3.2.2 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]: [illegible], [illegible]: [illegible], [illegible] [illegible], [illegible], [illegible],

باب 3

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [

1.3 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible] ,[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]	=	[illegible]
x^2	=	[illegible]
$10x$	=	[illegible] 4 [illegible]
39	=	[illegible]
25	=	[illegible] 2.5×2.5 [illegible] 4 [illegible]
64	=	[illegible]
$\sqrt{64} = 8$	=	[illegible]
	$\boxed{3}$	$x = 8 - 2 \times 2.5 = 8 - 5 =$

[illegible]. [illegible] x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible] [illegible] 10. [illegible] [illegible] 2.5 [illegible] x [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $10x$. [illegible] [illegible] [illegible] $x^2 + 10x = 39$. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] $4 \times 6.25 = 25$ [illegible] $2.5 \times 2.5 = 6.25$ [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] 5 [illegible] [illegible] 8. [illegible] [illegible] $39 + 25 = 64$, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $x = 3$.

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [

2.3 [illegible] 10 [illegible] 21 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$
\begin{aligned}
25 &= MT = (10/2)^2 \\
21 &= HT + MR = HB \\
4 &= KR = 25 - 21 \\
2 &= \sqrt{KR} \\
\boxed{3} \quad & x = WJ - WA = 5 - 2 = \\
\boxed{7} \quad & x = WJ + WA = 5 + 2 = \text{[illegible]}
\end{aligned}
$$

[illegible] x [illegible]: [illegible] 21 [illegible] x [illegible] 10 [illegible] .5 [illegible] 10 [illegible] [4] [illegible] [21] [illegible] [$5 \times 5 = 25$] [illegible] .2 [illegible]

3.3 [illegible] 3 [illegible] 4 [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible], [illegible], [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

باب 4

[illegible]

[illegible]

[illegible] $(a+x)(b+y)$ [illegible]

1. [illegible] $a \times b$
2. [illegible] $a \times y$
3. [illegible] $x \times b$
4. [illegible] $x \times y$

[illegible] $(a+x)(b+y) = ab + ay + bx + xy$

[illegible]

[illegible]:

[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$(+x)(+y) = +xy$$
$$(-x)(-y) = +xy$$
$$(+x)(-y) = -xy$$
$$(-x)(+y) = -xy$$

[illegible].

1.4 [illegible]

[illegible]

[illegible]:

[illegible].

[illegible].

[illegible]:

[illegible].

[illegible].

[illegible]:

[illegible].

[illegible],

[illegible].

[illegible]:

[illegible]

[illegible]:

$$(10+1)(10+2) = 100+10+20+2 = 132$$
$$(10-1)(10-1) = 100-10-10+1 = 81$$
$$(10+x)(10+x) = 100+10x+10x+x^2 = 100+20x+x^2$$
$$(10-x)(10-x) = 100-10x-10x+x^2 = 100-20x+x^2$$
$$(10-x)(10+x) = 100-10x+10x-x^2 = 100-x^2$$

$(10-x)(10+x) =$ [illegible]: [illegible]; [illegible] $100-x^2$ [illegible]! [illegible]

باب 5

[illegible]

1.5 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

$$(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=10$$
$$(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=30-2\sqrt{200}=30-\sqrt{800}$$

[illegible] $2\sqrt{200}=\sqrt{800}$. [illegible]: [illegible] $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$. [illegible]

2.5 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$2\sqrt{S} = \sqrt{4S}$$
$$3\sqrt{S} = \sqrt{9S}$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{S} = \sqrt{\tfrac{1}{4}S}$$

[illegible] $\sqrt{a^2 \cdot S} = a\sqrt{S}$ [illegible]: [illegible] 4 [illegible]. [illegible]

باب 6

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

$$(2\sqrt{9}) \times (3\sqrt{4}) = \sqrt{36 \times 36} = 36$$

[illegible]:

- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $(m\sqrt{a}) \times (n\sqrt{b}) = mn\sqrt{ab}$

[illegible]

باب 7

[illegible]

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$x^2 = 4x(10-x) = 40x - 4x^2$$
$$\Rightarrow \quad 5x^2 = 40x \quad \Rightarrow \quad x^2 = 8x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

[illegible] $x = 8$ [illegible] $10 - x = 2$.
[illegible]: [illegible].

[illegible]

[illegible]:
[illegible]: [illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\Rightarrow x^2 = \frac{900}{25} = 36 \Rightarrow x = 6 \; 100 = x^2 \times 2\frac{7}{9} = x^2 \times \frac{25}{9}$$

[illegible] $x = 6$ [illegible] $10 - x = 4$.

[illegible]

[illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\frac{10-x}{x} = 4 \Rightarrow 10 - x = 4x \Rightarrow 10 = 5x \Rightarrow x = 2$$

[illegible] $x = 2$ [illegible] $10 - x = 8$.

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible]

$$\Rightarrow x^2 + 7x = 228 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{7x}{12} + 1 = 20 \left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20$$

[illegible] .15.5 [illegible]: .240.25 :228 [illegible] .12.25 [illegible]: .3.5 [illegible]: [illegible]
.$x = 12$:3.5

[illegible]

[illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$\Rightarrow x^2 + 28 = 11x\; x^2 + (10 - x)^2 = 58 \Rightarrow 2x^2 - 20x + 100 = 58$$

.$x = 7$ [illegible] $x = 3$ [illegible]: .$x = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 28} = 5.5 \pm 2.5$

[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]:
[illegible].[illegible] [illegible]

$$\Rightarrow x^2 = 12x + 288\; \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} = x + 24 \Rightarrow \frac{x^2}{12} = x + 24$$

$$x = 6 + \sqrt{36 + 288} = 6 + 18 = 24$$

باب 8

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

1: [illegible]

2: [illegible]

3: [illegible]

4: [illegible]

5: [illegible]

6: [illegible]

[illegible]:

1: [illegible] $x(10-x)=21 \Rightarrow 10x-x^2=21 \Rightarrow x^2+21=10x$

$x=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm 2=3$ [illegible] 7

2: [illegible] $(10-x)^2-x^2=40 \Rightarrow 100-20x=40 \Rightarrow x=3$

3: [illegible] $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x \Rightarrow \frac{2}{15}x^2=\frac{1}{7}x \Rightarrow x=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$

4: [illegible] $x \cdot 4x = 20 \Rightarrow 4x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

5: [illegible] $4x \cdot 5x = 2x^2 + 36 \Rightarrow 20x^2 = 2x^2 + 36 \Rightarrow 18x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 2$

6: [illegible] $\left(x - \frac{x}{3} - 3\right)^2 = x \Rightarrow \left(\frac{2x}{3} - 3\right)^2 = x$

$\Rightarrow \frac{4x^2}{9} + 9 - 4x = x \Rightarrow x^2 + 20\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}x \Rightarrow x = 9$ [illegible] $2\frac{1}{4}$

القسم

[illegible]

[illegible]:

[illegible] [illegible] [illegible] [

باب 9

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]
- [illegible]

[illegible] $a \times b =$ [illegible] $c \times d$

[illegible]

[illegible]

[illegible]	[illegible]
[illegible] b	[illegible] a
[illegible] d	[illegible] c

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}$$

[illegible]:

1. [illegible] $= \frac{10 \times 4}{6} = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$ [illegible], [illegible]
2. [illegible] $= \frac{8 \times 4}{10} =$ [illegible], [illegible] $\frac{32}{10} = 3\frac{1}{5}$
3. [illegible] $= \frac{10 \times 6}{30} = 2$ [illegible]. [illegible]

باب 10

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]:

$$[illegible] = [illegible] \times \frac{[illegible]}{2}$$

[illegible]

[illegible] 2.10

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]:

$$C = \pi d \approx \frac{22}{7} \times d \quad [illegible]$$

$$A = \frac{C}{2} \times \frac{d}{2} = \frac{Cd}{4} \quad [illegible]$$

$$A = d^2 - \frac{d^2}{7} - \frac{d^2}{14} = d^2 \times \left(1 - \frac{3}{14}\right) = d^2 \times \frac{11}{14} \quad [illegible]$$

[illegible] $\pi \approx \frac{22}{7}$ [illegible]: [illegible] $\pi/4 \approx 11/14$, [illegible]

[illegible] 3.10

[illegible]

[illegible]

[illegible]. [illegible]

[illegible]: [illegible]

$$V_{\text{[illegible]}} = \text{[illegible]} \times \text{[illegible]} \times \text{[illegible]}$$
$$V_{\text{[illegible]}} = \frac{1}{3} \times \text{[illegible]} \times \text{[illegible]}$$

[illegible]! [illegible]

4.10 [illegible]

[illegible]

[illegible], [illegible]. [illegible],

[illegible]: [illegible]

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

[illegible] c [illegible], [illegible] b [illegible] a [illegible]. [illegible]: [illegible], [illegible], [illegible]. [illegible]

باب 11

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible] $x + 10$. [illegible]

[illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible]: [illegible] $6.67 + 0.67x$ [illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible] $3.33 + 0.33x$ [illegible]: [illegible]

[illegible]: [illegible]

$$3.33 + 0.33x = x \quad \Rightarrow \quad 3.33 = 0.67x \quad \Rightarrow \quad x = 5$$

[illegible] 5 [illegible] 5 [illegible] x [illegible]: [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible] 48 [illegible]	[illegible]
8	[illegible]
6	[illegible]
14	[illegible]
7	[illegible]
[illegible] $8 + 6 + 2(14) + 2(7) = 56$	[illegible]

[illegible] 54 [illegible] 6 [illegible] 54 [illegible]: [illegible] 48

[illegible] [48] [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$ [illegible]	$7/12$	[illegible]
$1/12$ [illegible]	$3/12 = 1/4$	[illegible]
$1/12$ [illegible]	$2/12 = 1/6$	[illegible]

$\frac{13}{20} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} =$ [illegible]: [illegible]

الملاحق ا

[illegible]

[illegible]: [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	$ax^2 = bx$	$x = b/a$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 = c$	$x = \sqrt{c/a}$
[illegible]	[illegible]	$bx = c$	$x = c/b$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 + bx = c$	$x = \sqrt{(b/2a)^2 + c/a} - b/2a$
[illegible]	[illegible]	$ax^2 + c = bx$	$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{(b/2a)^2 - c/a}$
[illegible]	[illegible]	$bx + c = ax^2$	$x = \frac{b}{2a} + \sqrt{(b/2a)^2 + c/a}$

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

الملاحق ب

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible] x [illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]

Время выполнения	Распределенная транзакция	Локальная транзакция
100 мс, выполнение 1000 мс	1000	Распределенная транзакция
1000 мс, 1000 мс	2000	Локальная транзакция
Распределенная транзакция	Локальная транзакция	Распределенная транзакция
100 мс	1000 мс	1000 мс
100 мс	2000	2000 мс
100 мс	2000	1000 мс
100 мс	1000	1000 мс
1000 мс	1000	2000 мс
1000 мс	1000	1000 мс

Пример: Распределенная транзакция

При 10 распределенных транзакциях, выполняющихся 100 мс каждая, общая длительность 1000 мс, 1000 мс ожидания блокировок, выполняется 100 мс каждая: 100 распределенных транзакций

- Распределенная фаза подготовки → 1000 мс
- 100 мс → Распределенная фаза подтверждения 100 мс → 1000 мс → Распределенная фаза подтверждения
- Распределенная фаза подготовки → 1000 мс
- Распределенная фаза → 1000 мс
- Распределенная фаза подтверждения → 1000 мс

Решение 100 мс Локальная фаза фаза подтверждения фаза подтверждения фаза фаза 2 распределенная 100 фаза фаза 100 распределенная распределенная 10 распределенная фаза фаза 100 распределенная распределенная фаза фаза 100 мс, распределенная фаза 100 фаза, фаза распределенная. 100 распределенная,

[illegible]

[illegible]: [illegible] [illegible] [illegible]

.10 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]
.1900 [illegible], [illegible],

[illegible]: [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]: [illegible], [illegible] [illegible]. [illegible]
.2007 [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]., [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible]
.93[illegible]49 [illegible]. ,[illegible]2017[illegible] 18 [illegible], [illegible],[illegible] [illegible]

Libertine Linux and Arabic Naskh Noto in Typeset
fontspec and polyglossia with XeLaTeX Via

[illegible]

Omar Khayyam, Treatise on Algebra, Arabic translation

Arabic Translation

Modern LaTeX Editions of Public-Domain Mathematics Manuscripts

---

About this reader

- Reader type - Arabic Translation.
- The visible PDF is the front-facing translation reader; source TeX and support material are in the ZIP artifacts.

عمر الخيام

(1048–1131 □ / 440–517 (□□

رسالة في براهين الجبر والمقابلة

صناعة الجبر والمقابلة

ترجمة عربية مع الحفاظ على الرموز الرياضية الحديثة

Arabic Translation with Modern Mathematical Notation

يشتمل على تصنيف المعادلات التكعيبية والحلول الهندسية باستخدام القطوع المخروطية

Based on the Lahore Manuscript (13th Century)

(Smith Oriental MS 45, Columbia University Rare Book Library)

هذا الكتاب يقدم نسخة مصنفة من عمل عمر الخيام في الجبر،

وهو من أبرز الإنجازات في الرياضيات الإسلامية الوسطى.

يتضمن المعالجة الأولى المنهجية للمعادلات التكعيبية،
حيث تم حل جميع الأصناف الخمسة والعشرين باستخدام القطوع المخروطية.

Typeset in LaTeX with Arabic support via fontspec and XeLaTeX.
Arabic font: Noto Naskh Arabic

This edition prepared for scholarly and educational purposes.

Contents

0.1 المقدمة 4
0.1.1 مقدمة المؤلف 4
0.1.2 في طبيعة هذه الرسالة 4
0.2 تعريفات الكميات الأساسية 5
0.2.1 الجذر الشيء 5
0.2.2 المال المربع 5
0.2.3 تصنيف الأجناس الجبرية 5
0.3 تصنيف المعادلات 6
0.3.1 المعادلات القابلة للحل بالطرق الحسابية أو الإقليدية 6
0.3.2 المعادلات التكعيبية غير القابلة للاختزال الأصناف الأربعة عشر 7
0.4 في الحل الهندسي للمعادلات التكعيبية 8
0.4.1 المبرهنة الأساسية القضية التمهيدية 8
0.4.2 حل كعب وجذور يساويان عدداً $x^3 + cx = d$ 8
0.5 الأصناف الباقية غير القابلة للاختزال 10
0.5.1 ملخص أزواج القطوع المخروطية لكل صنف 10
0.5.2 في وجود الحلول وتعددها 10
0.5.3 الصنف الخامس والعشرون: كعب يساوي أموالاً وجذوراً وأعداداً 10
0.6 مسائل وتطبيقات 12
0.6.1 قسمة عشرة إلى جزأين 12
0.6.2 في مضاعفة المكعب 12
0.7 كلمات ختامية 13
ملاحظة المحرر 14

0.1 المقدمة

والشعر والفلك الرياضيات علماء أبرز من ،غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيامي النيسابوري الكامل اسمه ،عمر الخيام أعمالاً أنتج حيث وأصفهان، سمرقند في حياته معظم وقضى م، 1048 عام نيسابور في وُلد الوسيط. الإسلامي العالم في والفلك. الرياضيات في رائدة

الخيام يقوم العمل، هذا في المبكر. الإسلامي الجبر ذروة والمقابلة الجبر صناعة رسالة في براهين الجبر والمقابلة تُعد يلي: بما

- تقديم تعريفات دقيقة للكميات الأساسية في الجبر
- تصنيف جميع المعادلات حتى الدرجة الثالثة إلى خمسة وعشرين صنفاً
- حل أربعة عشر معادلة تكعيبية غير قابلة للاختزال باستخدام التراكيب الهندسية بالقطوع المخروطية
- التمييز بين الحلول الحسابية والحلول الهندسية

ومن ،شرف الدين الطوسي فيهم بما اللاحقين الرياضيين في بعمق أثرت م، 1079 عام حوالي ألفها التي الرسالة، هذه الغرب. في الجبر تطوير في ساهمت الأوروبية، اللغات إلى الترجمات خلال

0.1.1 مقدمة المؤلف

ومحدوديتهم: سابقيه بإنجازات فيها يعترف بمقدمة رسالته الخيام يفتح

مقدمة المؤلف

الحمد لله رب العالمين، والعاقبة للمتقين، ولا عدوان إلا على الظالمين، وصلى الله على سيدنا محمد وآله أجمعين.

أجمعين. وآله محمد سيدنا على الله وصلِّ الظالمين، على إلا عدوان ولا للمتقين، والعاقبة العالمين، رب لله الحمد

أما بعد، فإني قد سبقني في هذا الفن جماعة من أهل العلم، قدموا فيه أصناف المسائل، وبينوا فيه أصول المسائل، وبرهنوا على بعضها، ولم يتفق لهم برهان على البعض، ولم يفرقوا فيها بين ما يمكن أن يوجد بالقطوع المخروطية، وبين ما لا يمكن أن يوجد إلا بأساليب هندسية أخرى. وقد أملت أن أجمع هذا العلم في رسالة، وأبين فيها أصناف المسائل على وجه التمييز، وأضع لكل صنف برهاناً صحيحاً، وذلك أمر لم يسبقني إليه أحد من المتقدمين.

على وبرهنوا المسائل، أصول فيها وبينوا المسائل، أصناف فيه قدموا العلم، أهل من مجموعة سبقني الفن هذا في الآن: بطرق إلا إيجاده يمكن لا وما المخروطية بالقطوع إيجاده يمكن ما بين يميزوا ولم جميعاً؛ إثباتها في ينجحوا لم ولكن بعضها، صحيح برهان ووضع الصحيح، التمييز مع المسائل أصناف وتوضيح رسالة، في العلم هذا جمع في رغبت لقد أخرى. هندسية السابقين. من أحد إليه يسبقني لم شيء وهذا صنف لكل

0.1.2 في طبيعة هذه الرسالة

يُعرف الخيام الجبر بأنه علم المعادلات علم المعادلات. ويميز بعناية بين:

1. المعادلات البسيطة: التي يمكن اختزالها إلى أشكال خطية أو تربيعية، وتحل بالطرق الحسابية أو الإقليدية
2. المعادلات التكعيبية التي تتطلب تراكيب القطوع المخروطية المعادلات المركبة غير القابلة للاختزال:

فنقول: إن الجبر والمقابلة علم يُستخرج به المجهول من المعلوم المفروض، إذا كان بينهما نسبة تقتضي ذلك. وهذا العلم يتضمن الأعداد والجذور والأموال والكعاب.

العلم وهذا ذلك. تتطلب علاقة هناك تكون عندما المعروف، المعطى من المجهول به يُستخرج علم والمقابلة الجبر نقول: والكعاب. والأموال والجذور الأعداد يشمل

0.2 تعريفات الكميات الأساسية

يبدأ الخيام بتعريفات دقيقة للكميات الجبرية، مستمراً وموسعاً لتقاليد الخوارزمي:

> أصل هذا العلم: أن العدد المفرد هو ما لا ينسب إلى جذر، ولا إلى مال، ولا إلى كعب، ولا إلى ما يتركب منها.
>
> منها. يُركب ما إلى ولا كعب إلى ولا مال إلى ولا جذر إلى ينسب لا ما هو البسيط العدد هو: العلم هذا أساس

0.2.1 الجذر الشيء

والجذر هو كل شيء مضروب في نفسه من الواحد وما فوقه من الأعداد، وما دونه من الكسور. فإذا ضرب في نفسه فهو مال، وإذا ضرب المال في الجذر فهو كعب، وإذا ضرب الكعب في الجذر فهو مال مال، وإذا ضرب مال المال في الجذر فهو مال كعب، وإذا ضرب مال الكعب في الجذر فهو كعب كعب.

في ضُرب إذا الكسور. في وأقل الصحيحة، الأعداد في وأعلى الواحد من بدءاً نفسها، في مضروبة كمية كل هو الجذر في المال مال ضُرب وإذا مال؛ مال فهو الجذر في الكعب ضُرب وإذا كعب؛ فهو الجذر في المال ضُرب وإذا مال؛ فهو نفسه كعب. كعب فهو الجذر في الكعب مال ضُرب وإذا كعب؛ مال فهو الجذر

0.2.2 المال المربع

والمال هو ما ينتج من ضرب الجذر في نفسه. والكعب هو ما ينتج من ضرب المال في الجذر. وما فوق الكعب فهو مركب من هذه الأجناس.

مركب فهو الكعب فوق وما الجذر. في المال ضرب من ينتج ما هو الكعب نفسه. في الجذر ضرب من ينتج ما هو المال الأجناس. هذه من

0.2.3 تصنيف الأجناس الجبرية

يعدّ الخيام الأجناس البسيطة والمركبة بشكل منهجي:

الحديثة الرموز	اللاتيني الاسم	**الحدود الجبرية**
x	[illegible]	جذر
x^2	[illegible]	مال
x^3	[illegible]	كعب
x^4	[illegible]	مال مال
x^5	[illegible]	مال كعب
x^6	[illegible]	كعب كعب

في هذا التصنيف، نرى بوضوح التقدم الذي أحرزه الخيام عن سابقيه. فبينما اقتصرت أعمال الخوارزمي على الأجناس حتى الكعب، توسع الخيام في الأجناس المركبة وأعطى لها أسماء واضحة ومنهجية.

0.3 تصنيف المعادلات

يشكل هذا القسم قلب رسالة الخيام. يصنف جميع المعادلات حتى الدرجة الثالثة إلى خمسة وعشرين صنفاً. وبالاتباع لعوائد عصره، تكون جميع المعاملات موجبة، فتُعتبر معادلات مثل $x^3 + cx = bx^2 + d$ و $x^3 + bx^2 = cx + d$ من أصناف مختلفة.

0.3.1 المعادلات القابلة للحل بالطرق الحسابية أو الإقليدية

المعادلات البسيطة الأصناف 1–6

تتكون المجموعة الأولى من المعادلات الخطية والتربيعية، التي تحل بدون القطوع المخروطية:

1. الجذور تساوي الأعداد: $bx = c$ جذور تساوي أعداداً
2. الأموال تساوي الجذور: $x^2 = bx$ أموال تساوي جذوراً
3. الأموال تساوي الأعداد: $x^2 = c$ أموال تساوي أعداداً
4. الأموال والجذور تساوي الأعداد: $x^2 + bx = c$ أموال وجذور تساوي أعداداً
5. الأموال والأعداد تساوي الجذور: $x^2 + c = bx$ أموال وأعداد تساوي جذوراً
6. الجذور والأعداد تساوي الأموال: $bx + c = x^2$ جذور وأعداد تساوي أموالاً

كانت هذه الأصناف الستة معروفة منذ الخوارزمي وتحل بالطرق الابتدائية.

المعادلات التكعيبية الحدية الأصناف 7–12

وأما الكعاب والأموال والجذور التي لا تختلف فيها الأجناس، فإنها تنقسم إلى اثني عشر نوعاً: منها ما يحل بالجبر، ومنها ما يحل بالقطوع المخروطية.

7. الكعب يساوي المال: $x^3 = bx^2$ كعب يساوي مالاً
8. الكعب يساوي الجذر: $x^3 = cx$ كعب يساوي جذراً
9. الكعب يساوي العدد: $x^3 = d$ كعب يساوي عدداً
10. المال يساوي الكعب: $bx^2 = x^3$ مال يساوي كعباً
11. الجذر يساوي الكعب: $cx = x^3$ جذر يساوي كعباً
12. العدد يساوي الكعب: $d = x^3$ عدد يساوي كعباً

هذه المعادلات الحدية تختزل إلى أشكال أبسط بالقسمة.

المعادلات الثلاثية القابلة للاختزال الأصناف 13–16

13. الكعاب والأموال تساوي الجذور: $x^3 + bx^2 = cx$ كعاب وأموال تساوي جذوراً
14. الكعاب والجذور تساوي الأموال: $x^3 + cx = bx^2$ كعاب وجذور تساوي أموالاً
15. الأموال والجذور تساوي الكعاب: $bx^2 + cx = x^3$ أموال وجذور تساوي كعاباً
16. أشكال خاصة قابلة للاختزال كعاب وأموال وأعداد

0.3.2 المعادلات التكعيبية غير القابلة للاختزال الأصناف الأربعة عشر

يُعد إنجاز رسالة الخيام الأبرز حله المنهجي للأربعة عشر معادلة تكعيبية غير قابلة للاختزال. وهذه تتطلب تقاطع القطوع المخروطية لإيجاد حلها الهندسي. نقدمها هنا مع أسمائها العربية ورموزها الحديثة:

الأصناف الأربعة عشر غير القابلة للاختزال

المجموعة الأولى: معادلات ثلاثية ذات قوى متعاقبة

17. الكعب والمال يساويان العدد كعب ومال يساويان عدداً:

$$x^3 + bx^2 = d$$

18. الكعب والعدد يساويان المال كعب وعدد يساويان مالاً:

$$x^3 + d = bx^2$$

19. الكعب يساوي المال والعدد كعب يساوي مالاً وعدداً:

$$x^3 = bx^2 + d$$

المجموعة الثانية: معادلات ثلاثية ذات قوى مختلطة

19. الكعب والجذور يساويان العدد كعب وجذور يساويان عدداً:

$$x^3 + cx = d$$

20. الكعب والعدد يساويان الجذور كعب وعدد يساويان جذوراً:

$$x^3 + d = cx$$

21. الكعب يساوي الجذور والعدد كعب يساوي جذوراً وعدداً:

$$x^3 = cx + d$$

المجموعة الثالثة: معادلات رباعية ثلاثة حدود في طرف

22. الكعب والأموال يساويان الجذور والعدد كعب وأموال يساويان جذوراً وعدداً:

$$x^3 + bx^2 = cx + d$$

23. الكعب والجذور يساويان الأموال والعدد كعب وجذور يساويان أموالاً وعدداً:

$$x^3 + cx = bx^2 + d$$

24. الكعب والأعداد يساويان الأموال والجذور كعب وأعداد يساويان أموالاً وجذوراً:

$$x^3 + d = bx^2 + cx$$

المجموعة الرابعة: معادلات رباعية حدان في كل طرف

25. الكعب يساوي الأموال والجذور والأعداد كعب يساوي أموالاً وجذوراً وأعداداً:

$$x^3 = bx^2 + cx + d$$

0.4 في الحل الهندسي للمعادلات التكعيبية

0.4.1 المبرهنة الأساسية القضية التمهيدية

قبل تقديم حلوله، يثبت الخيام مبرهنة أساسية عن الأجسام المستطيلة السطوح المتوازيات المستطيلات:

مقدمة في المجسمات المتساوية

إذا كان لنا مكعب مستطيل السطوح، قاعدته مربعة، وارتفاعه خط معلوم، وأردنا أن نبني على قاعدة مربعة أخرى مكعباً مستطيلاً مساوياً له، فنحن نجد خطاً يكون النسبة بين ضلع القاعدة الأولى وضلع القاعدة الثانية كالنسبة بين ذلك الخط والارتفاع.

متوازياً أخرى مربعة قاعدة على نبني أن وأردنا معلوم، خط وارتفاعه مربعة قاعدته مستطيلات متوازي لدينا كان إذا الخط ذلك كنسبة الثانية القاعدة وضلع الأولى القاعدة ضلع بين النسبة تكون بحيث خطاً نجد فإننا له، مساوياً مستطيلات الارتفاع. إلى

0.4.2 حل كعب وجذور يساويان عدداً $x^3 + cx = d$

هذا هو الحالة الأشهر في رسالة الخيام المعادلة $x^3 + cx = d$ كعب وجذور يساويان عدداً. يحلها الخيام بتقاطع القطع المكافئ والدائرة.

$x^3 + cx = d$

فلنضرب مثالاً: كعب وجذور يساويان عدداً. فلنجعل العدد مكعباً مستطيل السطوح، قاعدته مربعة، أضلاعها مساوية لعدد الجذور، وارتفاعه خط معلوم. ثم نأخذ قطعاً مكافئاً رأسه نقطة، ومحوره خط مستقيم، ومعلمه مساوٍ لضلع القاعدة. ونصف دائرة على ارتفاع المكعب، فنلقي من نقطة التقاطع القطع المكافئ والدائرة خطاً إلى المحور، فذلك الخط هو الجذر المطلوب.

الجذور، لعدد مساوية أضلاعها مربعة، قاعدته مستطيلات متوازياً العدد نجعل عدداً. يساويان وجذور كعب مثالاً: لنضرب على دائرة ونرسم القاعدة؛ لضلع مساوٍ ومعلمه مستقيم، خط ومحوره نقطة، رأسه مكافئاً قطعاً نأخذ ثم معلوم. خط وارتفاعه المطلوب. الجذر هو الخط فذلك المحور: إلى خطاً نلقي والدائرة المكافئ القطع التقاطع نقطة من المتوازي. ارتفاع

التركيب الهندسي

يتم التركيب على النحو التالي:

1. ليكن $b^2 = c$ معامل x وليكن، h بحيث $b^2h = d$ الحد الثابت
2. $y^2 = bx$ ، بحيث لأي نقطة على القطع المكافئ:b ومعلم BZ ومحور B نرسم قطعاً مكافئاً برأس
3. كقطر نرسم نصف دائرة h ، وعلى B عند h ننصب عموداً
4. D لتقطع نصف الدائرة القطع المكافئ عند النقطة
5. BZ عموداً على DZ ، وh عموداً على DE نلقي من D
6. هو الجذر المطلوب $y = BE$ فيكون

البرهان

بخاصية القطع المكافئ:

$$y^2 = bx \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

بخاصية الدائرة ذات القطر h:

$$x^2 = y(h - y)$$

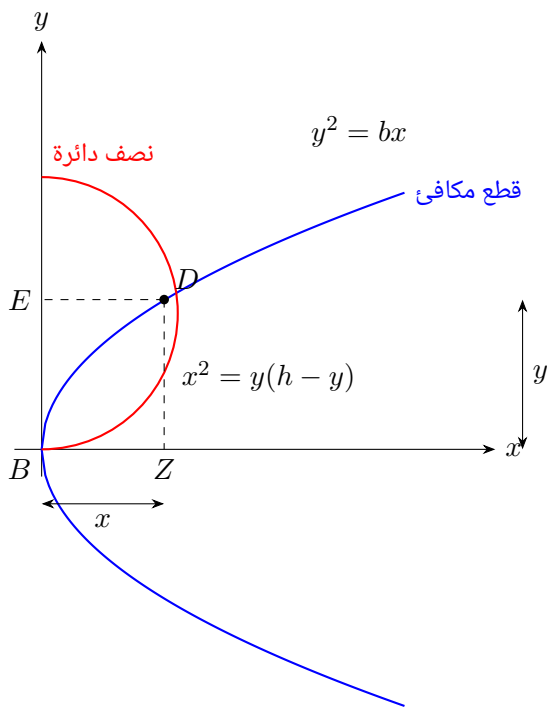

Figure 1: بتقاطع القطع المكافئ ونصف الدائرة $x^3 + cx = d$ تركيب الخيام لـ

من هذين:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{y} = \frac{h-y}{x}$$

في تناسب متسلسل. $b : y = y : x = x : (h-y)$ وبالتالي
نحصل على: $b^2 : y^2 = b : (h-y)$ من

$$b^2(h-y) = y^3$$
$$b^2h - b^2y = y^3$$
$$y^3 + b^2y = b^2h$$

باستبدال $c = b^2$ و $d = b^2h$:

$$\boxed{y^3 + cy = d}$$

0.5 الأصناف الباقية غير القابلة للاختزال

0.5.1 ملخص أزواج القطوع المخروطية لكل صنف

يلخص الجدول التالي أزواج القطوع المخروطية المستخدمة لكل من الأصناف الأربعة عشر، منظمة حسب العائلات الهندسية الخمس التي وضعها الخيام:

التسمية العربية عند الخيام	القطوع المخروطية	المعادلة
دائرة ومكافئ	دائرة [] مكافئ	$x^3 + bx^2 = d$
مكافئ وزائد	مكافئ [] زائد	$x^3 + d = bx^2$
مكافئ وزائد	مكافئ [] زائد	$x^3 = bx^2 + d$
دائرة ومكافئ	دائرة [] مكافئ	$x^3 + cx = d$
مكافئ وزائد	مكافئ [] زائد	$x^3 + d = cx$
مكافئ وزائد	مكافئ [] زائد	$x^3 = cx + d$
دائرة وزائد	دائرة [] زائد	$x^3 + bx^2 = cx + d$
دائرة وزائد	دائرة [] زائد	$x^3 + cx = bx^2 + d$
دائرة وزائد	دائرة [] زائد	$x^3 + d = bx^2 + cx$
زائدان	زائد [] زائد	$x^3 = bx^2 + cx + d$

0.5.2 في وجود الحلول وتعددها

يناقش الخيام بعناية الشروط التي توجد عندها حلول. يلاحظ أن بعض المعادلات التكعيبية قد يكون لها:

- لا حل []حقيقي موجب[]
- حل واحد موجب
- حلان موجبان

واعلم أن بعض هذه الأصناف قد يكون له حل واحد، وبعضها قد يكون له حلان، وبعضها لا يمكن أن يوجد إلا بشرط. فإذا كان القطعان لا يلتقيان فلا حل للمسألة، وإذا كانا يلتقيان في نقطة واحدة فحل واحد، وإذا كانا يلتقيان في نقطتين فحلان.

لم إذا بشرط. إلا إيجاده يمكن لا وبعضها حلان، له يكون قد وبعضها واحد، حل له يكون قد الأصناف هذه بعض أن اعلم فحلان. نقطتين في تقاطعا وإذا واحد، فحل واحدة نقطة في تقاطعا وإذا للمسألة، حل فلا القطعان يتقاطع

0.5.3 الصنف الخامس والعشرون: كعب يساوي أموالاً وجذوراً وأعداداً

الحالة الأخيرة $[x^3 = bx^2 + cx + d]$ هي الأكثر تعقيداً:

وأما الصنف الخامس والعشرون: كعب يساوي أموالاً وجذوراً وأعداداً، فإنه يحتاج إلى قطعين زائدين مختلفين. فنصنع قطعاً زائداً له أحد محوريه على امتداد الخط المعلوم، ونصنع قطعاً زائداً آخر له أحد محوريه على امتداد الخط الآخر، ونلقي من نقطة التقاطعهما خطاً إلى الموضع المعلوم، فهو الجذر المطلوب.

قطعاً نصنع مختلفين. زائدين قطعين فيتطلب وأعداداً، وجذوراً أموالاً يساوي الكعب والعشرون: الخامس الصنف أما نقطة ومن الآخر؛ الخط امتداد على محوريه أحد آخر زائداً قطعاً ونصنع المعروف، الخط امتداد على محوريه أحد زائداً المطلوب. الجذر فهو المعروف، الموضع إلى خطاً نلقي تقاطعهما

0.6 مسائل وتطبيقات

0.6.1 قسمة عشرة إلى جزأين

يوضح الخيام طريقته بمسألة تؤدي إلى معادلة تكعيبية:

مسألة

مسألة: قال قائل: قسّم عشرة إلى جزأين، بحيث يكون مجموع مربعي الجزأين مع خارج قسمة الكبير على الصغير اثنين وسبعين.

اثنين الأصغر على الأكبر قسمة خارج مع الجزأين مربعي مجموع يكون بحيث جزأين إلى عشرة اقسم شخص: قال وسبعين.

الحل. الشرط يعطي: $10 - x$. فالجزء الأصغر هو x لنكن الجزء الأكبر .

$$x^2 + (10 - x)^2 + \frac{x}{10 - x} = 72$$

بتبسيط:

$$2x^2 - 20x + 100 + \frac{x}{10 - x} = 72$$

وهذا يؤدي إلى:

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

، وتحل بتقاطع دائرة وزائد. $x^3 + cx = bx^2 + d$ وهي من الصنف

0.6.2 في مضاعفة المكعب

يُبين الخيام أن مسألة مضاعفة المكعب القديمة تُعادل حل المعادلة $x^3 = 2a^3$، وهي ضمن تصنيفه بصنف كعب يساوي عدداً:

ومن ذلك مضاعفة المكعب، وهي مسألة مشهورة بين القدماء. فإنها تؤول إلى أن كعباً يساوي عدداً، والعدد هو مضاعفة المكعب المعطى.

المكعب مضاعفة هو والعدد عدداً، يساوي الكعب أن إلى تختزل فإنها القدماء. بين مشهورة مسألة وهي المكعب، مضاعفة المعطى.

0.7 كلمات ختامية

يختتم الخيام رسالته بتأملات في طبيعة الجبر وعلاقته بالهندسة:

وقد أتممنا ما أردنا من جمع أصناف المسائل الجبرية، ووضع البراهين عليها. ونحن نعلم أن بعض الناس يعتقدون أن الجبر بريء من البرهان الهندسي، ولكن هذا باطل. فإن الأصناف التي ذكرناها لا يمكن أن تُبرهن إلا بالقطوع المخروطية أو بغيرها من الأدلة الهندسية. والجبر والمقابلة إنما هما وسيلة لاستخراج المجهول، والبرهان على صحة ذلك إنما هو بالهندسة.

الجبر أن يعتقدون الناس بعض أن نعلم عليها. البراهين ووضع الجبرية المسائل أصناف جمع من قصدناه ما أكملنا لقد بوسائل أو المخروطية بالقطوع إلا إثباتها يمكن لا ذكرناها التي الأصناف فإن باطل. هذا ولكن الهندسي، البرهان من خالٍ بالهندسة. هو ذلك صحة على والبرهان المجهول، لاستخراج وسيلة هما إنما والمقابلة الجبر أخرى. هندسية

والله ولي التوفيق.

توفيق. كل مصدر والله

تمت الرسالة

□□□ □□ □□□ □□□□□□□□

ملاحظة المحرر

هذه النسخة مبنية أساساً على مخطوطة لاهور من القرن الثالث عشر [illegible] 45، مكتبة الكتب النادرة بجامعة كولومبيا، مع الرجوع إلى المصادر التالية:

- [illegible], [illegible]. [illegible]. [illegible], 1851.
- [illegible], [illegible]. [illegible]. [illegible]: [illegible], 1931.
- [illegible], [illegible], [illegible], [illegible]. [illegible]: [illegible], 2000.

تم تسوية النص العربي لتسهيل القراءة مع الحفاظ على المفردات التقنية والمحتوى الرياضي للأصل.
تمثل التراكيب الهندسية بالرموز الحديثة مع الحفاظ على البنية المنطقية لبراهين الخيام.

[illegible]